解答例

STEP III 2007、第 2 問

純粋数学 ・ 二項べき級数

> **STEP III 2007、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q2

鍵となる考え方

すべては一つの二項級数（binomial series）から導かれる。$(1-4x)^{-1/2}$ の係数がわかれば、級数を微分すると因子 n が降りてきて（$(n!)^2$ が $n!\,(n-1)!$ に変わる）、積分すると $n+1$ で割られる（$(n!)^2$ が $n!\,(n+1)!$ に変わる）。したがって、後に続く和はどれも最初の級数の導関数または積分を、$|x| < \frac{1}{4}$ の内部のうまく選んだ点で評価したものである。

解答

小問 (i)

奇数の積に、欠けている偶数 $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$ を掛けて割る：

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot 2\cdots n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

なぜなら、n 個の偶数 $2k$ はそれぞれ因子 2 と因子 k を一つずつ与えるからである。

$|4x| < 1$、すなわち $|x| < \frac{1}{4}$ のとき、二項級数により

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\,(-4x)^n.$$

分子は n 個の因子からなり、それぞれが負であるから、$(-1)^n\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$ に等しい。$(-1)^n$ は $(-4)^n$ の符号と打ち消し合い、$4^n/2^n = 2^n$ であるから、x^n の係数は

$$\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

となる。ここで最初の結果を用いた。よって、$|x| < \frac{1}{4}$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

が成り立ち、示すべきことが示された。

小問 (ii)

冪級数（power series）は、その収束区間（interval of convergence）の内部、ここでは $|x| < \frac{1}{4}$ において項別に微分してよい。両辺を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

一方、右辺では定数項が消え、x^n は nx^{n-1} になる。$n/(n!)^2 = 1/(n!\,(n-1)!)$ であるから、

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

x を掛けると、求めたい冪 x^n が得られる：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

ここで $x = \frac{6}{25}$ とおく。$\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ であるから、これは許される。このとき $1-4x = \frac{1}{25}$ であるから $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$ となり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

小問 (iii)

考えてみよう 今度の階乗は $(n!)^2$ ではなく $(n+1)!\,n!$ である。級数にどのような操作を施せばこれが得られるだろうか。

$(n+1)! = (n+1)\,n!$ であるから、第 n 項の係数を $n+1$ で割る必要がある。x^n を積分するとちょうどそうなる：$\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。冪級数の項別積分（term-by-term integration）もその収束区間の内部で正当であるから、$|x| < \frac{1}{4}$ に対して小問 (i) の級数を 0 から x まで積分する：

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\right]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

よって

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

次に、目標の和の冪を合わせる。$3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$ であるから、

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

したがって目標の和は、この級数の $x = \frac{2}{9}$ における値の 9 倍である。$\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ であるから、これは正当な値である。このとき $1 - 4x = \frac{1}{9}$、$\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$ であり、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

となり、示すべきことが示された。和は $n = 1$ から始まるので、先頭の項 x（定数 1 の積分）を引かなければならないことに注意せよ。

検算

- (i) で $n = 2$ とすると $1 \cdot 3 = 3$、$\frac{4!}{2^2\,2!} = 3$ である。級数は $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$ と始まり、これは 2 乗して確かめた結果と一致する：$(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$。
- (ii) の最初の 3000 項を厳密な分数で足し合わせると 60.000… となり、(iii) の最初の 400 項は計算機の精度で 1.000… を与える。
- (iii) の最初の項（$n = 1$）は $\frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9}$ であり、すでに合計 1 のかなりの部分を占める。その後の項はおおよそ $(8/9)^n$ のように減少する。

よくある間違い

- 二項係数の符号を見失うこと：分子には負の因子が n 個あり、$(-4)^n$ にも n 個あるので、ちょうど打ち消し合う。
- $\frac{6}{25}$ と $\frac{2}{9}$ が $|x| < \frac{1}{4}$ の内部にあることの確認を忘れること。その外側では級数は発散する。
- (iii) で、定数 1 の積分から生じる x の項を忘れること。そうすると答えが 1 ではなく 3 になってしまう。

STEP のその先へ

小問 (iii) に現れる数 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ はカタラン数(Catalan numbers)$1, 1, 2, 5, 14, \ldots$ であり、括弧の付け方、二分木（binary trees）をはじめ多くの構造の個数を数える。そして $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ はその母関数（generating function）である。証明なしに用いた事実、すなわち冪級数は収束半径（radius of convergence）の真に内側で項別に微分・積分できるということは、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な定理である。Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。