解答例

STEP III 2007、第 11 問

力学 ・ 縁を越えて転がる運動

> **STEP III 2007、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q11

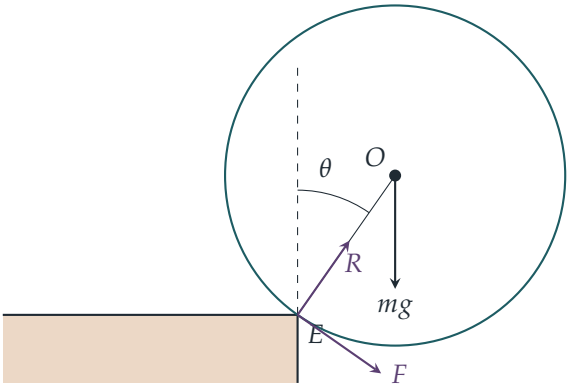
鍵となる考え方

リムが台の縁に達すると、縁は支点（pivot）としてはたらく。縁に接しているリム上の点は静止しているので、中心は縁を中心とする半径 a の円周上を動く。縁での接触力（contact force）を、半径方向の成分 R（垂直抗力（normal reaction））とリムに沿った成分 F（摩擦力（friction））に分け、それらを重心（centre of mass）の運動と比較する。この問題の要点は、質量がどこにあるかに尽きる。(i) ではすべての質量が中心にあるので、車輪は中心のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）をもたない。(ii) では質量がリム上にあり、それこそが摩擦力を生み出す原因である。

解答

モデルと記号。リム、スポーク、輪は軽い剛体（rigid body）であり、ハブと 2 つの粒子は質点として扱う。縁上でリムと接する点を E、中心を O とし、EO が鉛直上向きとなす角を θ とする。したがって車輪が縁に到達した瞬間に $\theta = 0$ である。リムが滑らずに E と接している間、E にあるリム上の物質点は静止している。よって剛体は E のまわりを角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で回転し、O は E を中心とする半径 a の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で動く。

E での接触力は、R を EO 方向（E から離れる向き）の成分、F を EO に垂直で θ が増加する向きを正とする成分として、2 つの成分に分けられる。E は静止しているので接触力は仕事をせず、エネルギーは保存される。



ここで R は EO に沿ってはたらき、F は正の向きに描いてある。

E から距離 a にある重心 G の加速度は、運動方向に $a\ddot{\theta}$、E に向かう向きに $a\dot{\theta}^2$ の成分をもつ。物体全体にはたらく外力（重力 mg と接触力）を分解すると、

$$\text{運動方向：}\quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{向かう先}E\text{：}\quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

どちらの小問でも重心は O（ハブ、あるいは 2 つの粒子の中点）にあるので、(1) と (2) はどちらの場合にも成り立つ。

小問 (i)

台の上で車輪は一定の速さ u で動くので、$\theta = 0$ で $\dot{\theta} = u/a$ である。運動エネルギーはハブのもの $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$ だけであり、ハブは $a(1-\cos\theta)$ だけ下降しているから、

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

時間で微分し、$2a\dot{\theta}$（$\dot{\theta} \geq u/a > 0$ より 0 でない）で割ると、

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

これを (1) に代入すると $F = 0$ となる。すなわち**摩擦力は 0 である**。これが示すべきことであった。

直接的な理由もある。リムとスポークは軽いので、それらにはたらく力の O のまわりのモーメントの総和は 0 でなければならない。それらの力は E での接触力と、O でハブから受ける力であり、後者は O のまわりのモーメントをもたない。接触力の O のまわりのモーメントは Fa なので、$F = 0$ である。

(2) より、垂直抗力は

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

$\theta = 0$ でこれは $m(g - u^2/a) > 0$ となる。$u^2 < ag$ だからである。よって車輪はすぐには縁から離れない。その後 θ が増加するにつれて R は減少し、リムは $R = 0$ となるとき、すなわち

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

のときに接触を失う。$u^2 < ag$ なので、この値は 1 より小さい。そのときハブが下降した距離は

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

となり、示すべき結果が得られた。全体を通して $F = 0$ なので、滑らないという仮定に摩擦の助けは要らず、この解析はこの点に至るまでそのまま成り立つ。

小問 (ii)

> **考えてみよう** 輪が E のまわりに回転している間、2 つの粒子はどこにあるか？

$\theta = 0$ では粒子を通る直径は鉛直なので、下側の粒子は接触点 E にある。その後、輪は E にある物質点、すなわちその粒子のまわりに剛体として回転するので、その粒子は E にとどまる。もう一方の粒子は直径の反対側、つまり E から距離 $2a$ だけ E ではなく EO に沿って離れた位置にとどまる。

よって E のまわりの慣性モーメントは $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$ である。台の上では輪は一定の速さ u で転がる（仕事をする力はない）ので、$\theta = 0$ で $\dot\theta = u/a$ である。動く方の粒子は E より $2a\cos\theta$ だけ高い位置にあり、エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{よって} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

微分して $2a\dot\theta \neq 0$ で割ると $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$ を得る。すると (1) より

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

したがって、すべての $\theta > 0$ に対して**摩擦力は 0 でない**。（その大きさは $\frac{1}{2}mg\sin\theta$ であり、O の運動方向とは逆向きにはたらく。）(i) とは異なり、今度はリムが質量をもつので、輪の回転を O の運動に追随させるには O のまわりのトルク（torque）が必要であり、それを供給できるのは摩擦だけである。

(2) より、

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + ga(1 - \cos\theta)) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

$\theta = 0$ では $R = m(g - u^2/a) > 0$ かつ $F = 0$ なので、縁を越える運動は確かに滑らずに始まる。輪が滑らずに接触を保ち続けるとすれば、R は

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

となる点で o まで減少する。ここで $u^2 < ag$ を用いた。よって $\theta_1 > 0$ であり、そこでは $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$ である。

考えてみよう なぜこのことから、接触を失う前に滑りが起こるといえるのか？

摩擦係数（coefficient of friction）を μ とすると、滑らないためには $|F| \le \mu R$ が必要である。$\theta \to \theta_1$（下から近づける）とすると、$R \to 0^+$ となる一方で $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$ であるから、$|F|/R \to \infty$ となる。したがって μ の値が（有限である限り）いくらであっても、R がまだ正であるうちに、$|F|$ が μR を超えなければならないような角 $\theta < \theta_1$ が存在する。よって輪は台との**接触を失う前に滑る**。

検算

- (i) で $u^2 \to ag$ とすると、下降距離は 0 に近づく。このときハブは $\theta = 0$ ですでに飛び出す寸前であり、そこでは $g = u^2/a$ である。$u \to 0$ とすると下降距離は $a/3$ となり、これは滑らかな球の頂上から静止状態で滑り始めた質点が球面を離れるという、よく知られた結果である。
- $a = 1\,\mathrm{m}$、$u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として運動方程式を数値的に時間発展させると、(i) では下降距離 0.1974 m が得られ、$(ag - u^2)/(3g)$ と一致する。(ii) では $\cos\theta_1 = 0.7039$ となり、$R = 0$ の直前で $|F|/R$ は 10^4 を超えた。
- (ii) の接触力を 2 つの粒子の加速度から直接（$m\ddot{\mathbf{r}}_G$ から重力を引いて）計算すると、F と R の両方が再現される。

よくある間違い

- (ii) で O のまわりの転がりの運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ を使いながら、支点のまわりの回転が始まると一方の粒子が E に固定されることを忘れる。E のまわりで考える方がすっきりする。
- 縁で力を水平方向と鉛直方向に分解してしまう。角では「法線」方向は鉛直ではなく、半径 EO の方向である。

- $F \neq 0$ というだけで「滑る」と結論してしまう。この議論には、$|F|$ が 0 から離れたまま $R \to 0$ となることが必要である。

STEP のその先へ

2 つの小問の対比は、質量分布に関するものである。角運動量の方程式と運動量の方程式の両方が満たされなければならないので、重心の運動が同じでも、慣性モーメントによって必要な接触力は異なる。大学の最初の力学の講義では、これは剛体の力学（rigid-body dynamics）となる。そこでは物体の運動は $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$ と G のまわりのトルクの方程式によって支配され、接触の拘束条件（転がり、滑り、接触の喪失）は不等式 $R \geq 0$ と $|F| \leq \mu R$ によって判定される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの方程式を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。