解答例

STEP III 2007、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

STEP III 2007、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q10

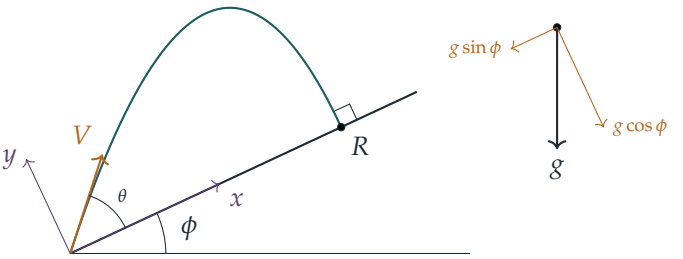
鍵となる考え方

斜面に沿う方向と斜面に垂直な方向に座標軸をとる。こうすると重力は二つの一定な加速度、すなわち斜面に沿って下向きの $g\sin\phi$ と斜面に向かう $g\cos\phi$ になる。注目すべき条件は、粒子が来た経路をそのまま引き返すということである。なめらかな（smooth）平面は自身に垂直な方向にしか押せないので、速度を反転させられるのは、粒子が平面にまっすぐ垂直に突入してくる場合に限られる。この一つの事実から両方の結果が導かれ、残りは式変形と相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）による最小化である。

解答

運動方程式

粒子を、空気抵抗なしに重力のみを受けて運動する質点としてモデル化する。重さ mg は鉛直下向きにはたらく。斜面に沿う方向とそれに垂直な方向に分解すると、



加速度は x 方向に $-g\sin\phi$、y 方向に $-g\cos\phi$ であり、いずれも一定である。与えられた初速度と出発点 $(0,0)$ を用いて 2 回積分すると、

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

経路を引き返すための条件

粒子が初めて平面に戻るのは $t > 0$ で $y = 0$ となるとき、すなわち

$$t = T = \frac{2V\sin\theta}{g\cos\phi}.$$

のときである。

考えてみよう 「同じ経路を戻る」ということから、衝突について何がわかるか。

跳ね返った後も、粒子は再び一定の重力のもとで運動する。同じ放物線に沿って原点まで戻るためには、跳ね返った直後の速度が、跳ね返る直前の速度のちょうど逆向きでなければならない（フィルムを逆再生するところを想像するとよい）。平面はなめらかであるとするので、平面が粒子に与える撃力（impulse）は平面に垂直である。つまり、斜面に沿う成分 $\dot{x}$ は跳ね返りによって変化しない。この成分が反転できるのは、それが零である場合だけである。したがって粒子は平面に直角に衝突しなければならず、$t = T$ において $\dot{x} = 0$ となる。（さらに、跳ね返りによって速さを失わずに $\dot{y}$ が反転する必要があるので、衝突は完全弾性（perfectly elastic）でなければならない。問題はこれを暗黙の前提としている。）

ここで $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$ であるから、$\dot{x}(T) = 0$ より

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

$0 < \theta < \pi/2$ より正である $V\cos\theta$ で割ると、

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

到達距離

$\dot{x}(T) = 0$ から、より簡潔な形 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$ が得られる。すると

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta\cdot\frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi\cdot\frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（同じことを言い換えると、x は $\dot{x}=0$ のとき最大になるので、着地点は、この運動で斜面上を最も高く上る点である。）

$2V^2/(gR)$ に関する恒等式

到達距離（range）の式から、

$$\frac{2V^2}{gR}=\frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta}=4\sin\phi\,(1+\tan^2\theta).$$

$\tan\theta=\dfrac{1}{2\tan\phi}$ より $\tan^2\theta=\dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$ であるから、

$$\frac{2V^2}{gR}=4\sin\phi+\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}=4\sin\phi+\frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}=3\sin\phi+\operatorname{cosec}\phi.$$

最大の到達距離

V を固定すると、R が最大となるのは $3\sin\phi+\operatorname{cosec}\phi$ が最小となるときである。$s=\sin\phi$ とおく。$0<\phi<\pi/2$ より $0<s<1$ である。正の数 $3s$ と $1/s$ に対する相加相乗平均の不等式により、

$$3s+\frac{1}{s}\geq 2\sqrt{3s\cdot\frac{1}{s}}=2\sqrt{3},$$

であり、等号が成り立つのは $3s=1/s$、すなわち $s=1/\sqrt{3}$ のときに限る。この値は確かに $(0,1)$ に属するので、この下限は実際に存在する斜面で達成される。よって

$$\frac{2V^2}{gR}\geq 2\sqrt{3}\quad\Longrightarrow\quad R\leq\frac{V^2}{\sqrt{3}g},$$

であり、等号は $\sin\phi=1/\sqrt{3}$ のとき成り立つ。したがって、到達距離の最大値は $V^2/(\sqrt{3}g)$ である。

考えてみよう 最大となるとき、条件 $\phi+\theta<\pi/2$ は満たされているか。

満たされている。実は常に満たされる。$\tan\theta\tan\phi=\frac{1}{2}$ で、両方の角が鋭角であるから、

$$\tan(\phi+\theta)=\frac{\tan\phi+\tan\theta}{1-\tan\phi\tan\theta}=2(\tan\phi+\tan\theta)>0,$$

であり、$0<\phi+\theta<\pi$ なので、$\phi+\theta<\pi/2$ でなければならない。最大となるとき、$\sin\phi=1/\sqrt{3}$ から $\tan\phi=1/\sqrt{2}$ となり、$\tan\theta=1/\sqrt{2}$ も成り立つ。つまり最良の場合は $\theta=\phi\approx 35.3^\circ$ である。

検算

▶ 単位：V^2/g は長さであり、到達距離として妥当である。

- 極限：$\phi \to 0$ のとき $\operatorname{cosec}\phi \to \infty$ であり、$R \to 0$ となる。ほとんど水平な平面に直角に着地するには、ほぼ真上に打ち出すしかなく、到達距離はほとんどない。$\phi \to \pi/2$ のとき平面は鉛直な壁となり、$\theta \to 0$、$2V^2/(gR) \to 4$ であるから $R \to V^2/(2g)$ となる。これは壁に沿って真上に投げ上げた粒子が達する高さである。どちらも理にかなっている。
- 数値的には、$g = 9.8$、$V = 10$、$\phi = 0.7$ として運動を逐次計算すると、$x \approx 5.8561$ に着地し、公式と一致する。着地時の速度は $\dot{x} \approx 0$ であり、それを反転させると粒子は原点に戻る。ϕ について格子探索を行うと、$V = 1$ のとき最大値 $R \approx 0.05891$ が得られ、これは $1/(9.8\sqrt{3})$ に等しい。

よくある間違い

- 重力の分解を逆にしてしまう。斜面に**沿う**成分が $g\sin\phi$ で、斜面に**垂直な**成分が $g\cos\phi$ である。$\phi = 0$ で確かめるとよい。
- 粒子は「水平に」あるいは「最高点で」着地しなければならないと言ってしまう。条件は、**平面**に直角に衝突すること、すなわち傾けた座標軸で $\dot{x} = 0$ となることである。
- $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ が実現可能であることの確認を忘れる。相加相乗平均の不等式が与えるのは限界であり、それが最大値となるのは等号が実際に成り立ちうる場合だけである。

STEP のその先へ

経路を引き返すことができるのは、ニュートン力学の**時間反転可能性**（time-reversibility）による。位置のみに依存する力については、すべての速度を反転させると、系はそれまでの履歴をたどって戻っていく。既定の水平・鉛直方向ではなく、幾何に合わせた座標軸を選ぶことは、大学の力学で絶えず使うことになる習慣である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この両方の考え方が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。