解答例

STEP III 2007、第 1 問

純粋数学 ・ 正接の和とビエトの定理

> **STEP III 2007、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q1

鍵となる考え方

角の和の正接（tangent）は、個々の角の正接の**対称な**関数（symmetric function）の比で表される。そして多項式（polynomial）の根（root）の対称関数こそ、ヴィエト（Vieta）の公式が係数（coefficient）を用いて与えてくれるものである。最後の小問では、三角方程式を $t = \tan\theta$ についての 4 次方程式（quartic）に書き換えるのがこつである。すると、その係数の対称性によって和の正接は 0 にならざるをえない。

解答

4 つの角の和の正接

和を $A + B$ と分け、$A = \theta_1 + \theta_2$、$B = \theta_3 + \theta_4$ とおくと、

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

である。次に、$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ の分子と分母に $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$ を掛けると、

$$\tan(A + B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

となる。分子は $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$ であり、分母は $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$ である。基本対称式（elementary symmetric functions）を

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

と書けば、これは

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2+\sigma_4}.}$$

となる。（このパターンは角が 2 つや 3 つの場合と同じである。分子には奇数次の対称式が符号を交互に変えて並び、分母には偶数次のものが並ぶ。）

係数による表示

$t_1,\dots,t_4$ が $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0$ の根であれば、$at^4+bt^3+ct^2+dt+e=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$ であり、係数を比較する（ヴィエトの公式）と

$$\sigma_1=-\frac{b}{a},\qquad \sigma_2=\frac{c}{a},\qquad \sigma_3=-\frac{d}{a},\qquad \sigma_4=\frac{e}{a}.$$

を得る。これを代入し、分子と分母に $a\neq 0$ を掛けると、

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{d-b}{a-c+e}.}$$

となる。

最後の小問

$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$ であるから、方程式は

$$2p\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=0.$$

となる。$\cos^2\theta$ で割ると（$\cos\theta=0$ という特殊な場合は無視する）、

$$2p=-(\cos\alpha+t\sin\alpha)\sec\theta,\qquad t=\tan\theta.$$

を得る。$\sec\theta$ は t の有理関数（rational function）ではないので、$\sec^2\theta=1+t^2$ を用いて両辺を 2 乗する：

$$4p^2=(\cos\alpha+t\sin\alpha)^2(1+t^2).$$

展開して、t^2 の係数に $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いると、

$$\sin^2\alpha\,t^4+2\sin\alpha\cos\alpha\,t^3+t^2+2\sin\alpha\cos\alpha\,t+(\cos^2\alpha-4p^2)=0,\qquad (*)$$

となる。

考えてみよう 2 乗すると余分な解が入り込むことがある。$\tan\theta_i$ は本当に $(*)$ の 4 つの根なのだろうか？

2 乗したことにより、$(*)$ は $p\cos 2\theta-\cos(\theta-\alpha)+p=0$ の解でも満たされる。しかし θ を $\theta+\pi$ に置き換えると、$t=\tan\theta$ と $\cos^2\theta$ は変わらず、$\cos(\theta-\alpha)$ の符号だけ

が変わる。したがって $(*)$ の各実数解 t に対し、$[0,2\pi)$ において正接が t となる 2 つの角のうち、もとの方程式を満たすのはちょうど一方だけである（両方が満たすには $\cos(\theta-\alpha)=0$、したがって $p\cos^2\theta=0$ でなければならず、これは特殊な場合である）。よって $[0,2\pi)$ における解は $(*)$ の実数解と一対一（one-to-one）に対応し、与えられた 4 つの角の正接は $(*)$ の 4 つの根である。

ここで先ほどの結果を $a=\sin^2\alpha$、$b=d=2\sin\alpha\cos\alpha$、$c=1$、$e=\cos^2\alpha-4p^2$ として適用する（$a\neq 0$、すなわち $\sin\alpha\neq 0$ が必要である。そうでなければ $(*)$ は 4 次方程式にならず、これも特殊な場合である）。分子は $d-b=0$ であり、分母は

$$a-c+e=\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha-4p^2=-4p^2,$$

であって、これは 0 でない（$p=0$ ならば方程式は単に $\cos(\theta-\alpha)=0$ となり、解は 2 つしかない）。よって

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0,$$

であるから、ある整数 n に対して $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=n\pi$ となり、示すべきことが示された。

検算

- 4 つの角の公式で $t_3=t_4=0$ とおくと、$(t_1+t_2)/(1-t_1t_2)$ となり、おなじみの 2 つの角の公式に帰着する。
- $p=\frac{1}{2}$、$\alpha=3$ として方程式を $[0,2\pi)$ で数値的に解くと 4 つの解が得られ、その和を π で割ったものは 10^{-9} 以内の誤差で整数になる。（すべての p と α で 4 つの解が得られるわけではない。$p=\frac{1}{2}$、$\alpha=1$ では解は 2 つしかない。）4 つの解をもつ (p,α) を無作為に選んで試したところ、どれも同様の結果になった。また、両方の公式を数千通りの無作為な角と 4 次方程式で確かめた。

よくある間違い

- ヴィエトの公式での符号の誤り。1 つおきの係数 b と d にはマイナス符号がつく。
- 2 乗せずに $\cos(\theta-\alpha)$ を直接 $\tan\theta$ で表そうとすること、あるいは 2 乗したのに不要な角が紛れ込んでいないかを確かめないこと。

STEP のその先へ

和の tan を基本対称式で表すことは、ある大定理の一例である。すなわち、根についてのすべての対称多項式は係数の多項式として表せる、という定理である。これは複

素数（complex number）を用いてもきれいに説明できる。$\prod(1+\mathrm{i}t_k) = \prod \sec\theta_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$ であり、その実部と虚部はそれぞれ $1-\sigma_2+\sigma_4$ と $\sigma_1-\sigma_3$ だからである。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）はこうした幾何的な考え方を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には同じ趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。