解答例

STEP II 2007、第 9 問

力学 ・ 反発係数を伴う斜め衝突

> **STEP II 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q9

鍵となる考え方

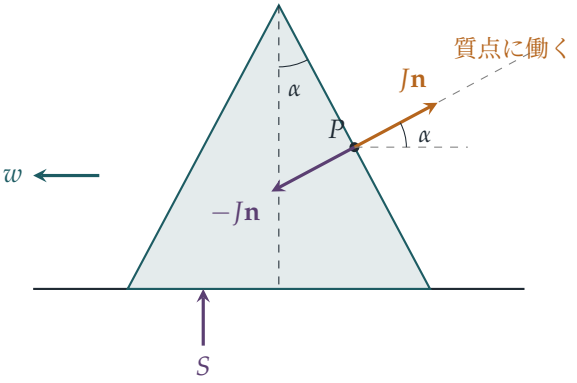
すべての面は滑らか（smooth）であるから、質点と円錐の間に働く力積（impulse）は衝突点における共通の法線（normal）の方向にのみ働き、台は鉛直方向にしか押すことができない。このことから二つのことが同時にわかる。すなわち、質点の速度のうち面に沿った成分は変化せず、質点と円錐を合わせた水平方向の運動量は保存される（conservation of momentum）。これを法線方向のニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）と組み合わせれば、円錐の速さが求まる。小問 (ii) は、落下する質点の速度の法線成分に小問 (i) を適用したものにすぎない。

解答

質点を点とみなし、円錐を（問題文にあるとおり）回転も鉛直方向の移動もしない剛体とみなす。したがって衝突直後、円錐はある速さ w で水平に滑る。円錐の軸と衝突点 P を含む鉛直面内で考える。P を通る母線（generator）は鉛直な軸と角 α をなすから、P における外向きの法線は水平方向と角 α をなす。単位ベクトルを

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ \text{（外向きの法線）}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\ \text{（斜面に沿って下向き）},$$

とおく。ただし第 1 座標は水平方向（軸から離れる向き）、第 2 座標は鉛直上向きとする。



質点が受ける力積を $J\mathbf{n}$ $(J>0)$ とすると、円錐は $-J\mathbf{n}$ を受け、その水平成分は $J\cos\alpha$ で、P から離れる向きである。台は上向きに鉛直な力積 $S=J\sin\alpha$ を与え、これは $-J\mathbf{n}$ の下向き成分をちょうど打ち消すのに必要な大きさである。円錐が鉛直方向の速度をもたないのはこのためである。よって

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

であり、円錐は P から離れる向きに水平に動く。

小問 (i)

質点は速度 $-u\mathbf{n}$ で到達し、これは $\mathbf{t}$ 方向の成分をもたない。面は滑らかであるから、質点が受ける力積は純粋に法線方向であり、$\mathbf{t}$ 方向の成分を変えることはできない。したがって衝突後もその成分は 0 のままであり、質点の速度は $\mathbf{n}$ のスカラー倍となる。つまり質点は P における法線に沿って動く（外向きに動くか、円錐が十分速く遠ざかる場合には内向きのまま、より遅く動く）。

衝突後の質点の速度は $(-u+J/m)\,\mathbf{n}$ である。円錐は P から離れる向き（図では左向き）に速さ w で水平に動くから、その速度は $(-w,0)$ であり、$\mathbf{n}$ 方向の成分は $-w\cos\alpha$ である。

> **考えてみよう** ニュートンの反発の法則は、どの方向の相対速度を比べるものか。また、円錐の寄与は何か。

反発の法則は共通の法線 $\mathbf{n}$ の方向に適用される。衝突前、$\mathbf{n}$ 方向の近づく速さは u である（円錐は静止している）。衝突後の遠ざかる速さは、質点の $\mathbf{n}$ 成分から円錐の $\mathbf{n}$ 成分を引いたものである：

$$\left(-u+\frac{J}{m}\right)-(-w\cos\alpha)=eu \quad\Longrightarrow\quad J=m\big((1+e)u-w\cos\alpha\big).$$

これを (1) に代入すると、

$$Mw = m\cos\alpha\big((1+e)u - w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w = \frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}}.$$

同じことであるが、水平方向の運動量は保存される（台の力積は鉛直である）：$m(-u\cos\alpha) = m\big(-u + \frac{J}{m}\big)\cos\alpha - Mw$ であり、これは再び (1) である。

小問 (ii)

今度は質点が速度 $(0, -u)$ で到達する。これを分解すると、

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

接線成分 $u\cos\alpha$ は衝突の影響を受けず（やはり面が滑らかであるため）、以後の議論には関わらない。力積 $J\mathbf{n}$、式 (1)、反発の式はいずれも法線成分のみを含むからである。したがって、小問 (i) の計算は、法線方向の近づく速さ u を $u\sin\alpha$ に置き換えるだけでそのまま使える：

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。

α についての最大化。 M, m, e, u を固定したとき、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$ を最大にすればよい。

> **考えてみよう** この商を微分するのは煩雑である。式をすっきりさせる置換はないだろうか。

分子と分母を $\cos^2\alpha$ で割り、$T = \tan\alpha > 0$ とおいて $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ を用いると、

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha + m} = \frac{T}{MT^2 + (M+m)} = \frac{1}{MT + \dfrac{M+m}{T}}.$$

相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により（両項とも正であるから）、

$$MT + \frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

であり、等号が成り立つのは $MT = (M+m)/T$、すなわち $T^2 = (M+m)/M$ のときに限る。よって f、したがって w はそこで最大となる。$T \mapsto \alpha$ は $(0,\infty)$ から $(0, \frac{\pi}{2})$ への全単射（bijection）であるから、これはただ一つの最大であり、

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{よって} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

となる（α は鋭角であるから正の根をとる）。最大の速さは $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$ である。

検算

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると、円錐は平らな円板になる。鉛直に落下しても水平に押す力は生じず、$w \to 0$ となる。小問 (i) で $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると法線は鉛直になり、やはり $w \to 0$ となる。よい。
- 小問 (i) で $\alpha \to 0$（鉛直な壁）とすると $w = \dfrac{m(1+e)u}{M+m}$ となり、質量 M の自由に動けるブロックとの正面衝突でおなじみの答えになる。
- $m \ll M$ のとき、最適な角度は $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$、すなわち $\alpha = 45^\circ$ となり、これは $\sin\alpha\cos\alpha$ が最大となる角度である。
- 数値で確かめると、$M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、小問 (ii) から $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$ を得る。力積を直接計算する方法（反発の式から J を求める）は、無作為に選んだパラメータに対して両方の公式と一致し、α についてのグリッド探索も最大を与える角度を裏づける。

よくある間違い

- 円錐が動くことを忘れ、遠ざかる速さが質点の速さ eu だけであるかのように反発の式を書いてしまう。円錐の速度は法線方向に成分 $w\cos\alpha$ をもつ。
- 法線方向の運動量を保存させてしまう。台の力積は $\mathbf{n}$ 方向の成分をもつので、保存されるのは**水平方向**の運動量だけである。
- 法線が鉛直方向と角 α をなすとしてしまう。鉛直方向と角 α をなすのは面のほうであり、法線は水平方向と角 α をなす。

STEP のその先へ

ここでの台は**拘束**（constraint）としてはたらいている。台は円錐から自由度（degree of freedom）を一つ取り除き、その力積はそれを実現するのに必要な大きさに自動的に決まる。大学では、これは撃力的な拘束の理論となり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）における一般化座標（generalised coordinates）を用いると見通しよく扱える。また、法線への射影は、拘束された物体の有効質量（effective mass）の背後にある考え方と同じものである。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*

（力学入門）には、2 次元における衝突と力積についての丁寧な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。