解答例

STEP II 2007、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルによるチェバの定理

> **STEP II 2007、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q8

鍵となる考え方

平面上のすべての点は $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ の形に書くことができ、小問 (i) はそのような点が BC 上にあるのはどのようなときかを正確に教えてくれる。すなわち、係数（coefficient）の和が 1 になるときである。したがって、ある直線が BC（あるいは CA や AB）と交わる点を求めるには、その直線上の一般の点を $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ で表し、係数に適切な条件を課せばよい。すると各比は β と γ で表され、それらの積はきれいに約分される。

解答

以下では、$BD:DC$ のような比はすべて**符号付き**比（signed ratio）を表すものとする。すなわち $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{DC}$ のとき $BD/DC=k$ とし、D が線分（segment）BC の外側にあるときこの値は負になる。A, B, C は同一直線上にない（collinear でない）ので、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ は平行でなく、どちらも零ベクトルでない。よって係数を比較してよい。つまり $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}=p'\mathbf{b}+q'\mathbf{c}$ ならば $p=p'$ かつ $q=q'$ である。

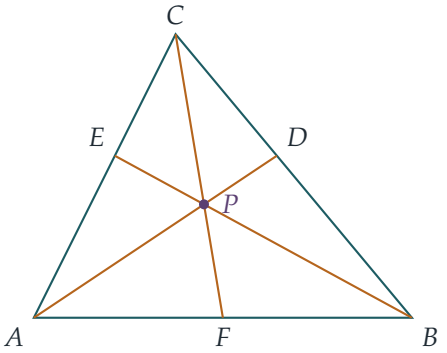
小問 (i)

$s+t=1$ ならば

$$s\mathbf{b}+t\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}=\mathbf{b}+t(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$

であり、これは t を媒介変数（parameter）とする、B を通り方向 $\overrightarrow{BC}$ をもつ直線のベクトル方程式（vector equation）である。t がすべての実数を動くとき、X はこの直線全体を動く。したがって X の軌跡（locus）は B と C を通る（無限に延びた）直線であり、線分 BC は $0\le t\le 1$ の部分にあたる。

逆に、係数を比較することにより、点 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ が直線 BC 上にあるのは $\beta+\gamma=1$ のとき、かつそのときに限る。以後はこの判定法を用いる。特に、$\beta+\gamma\neq 1$ は P が BC 上にないことを意味し、$\beta,\gamma\neq 0$ は P が CA 上にも AB 上にもないことを意味する。



小問 (ii)

直線 AP 上の一般の点は $\lambda(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\lambda\beta\,\mathbf{b}+\lambda\gamma\,\mathbf{c}$ である。小問 (i) より、この点が BC 上にあるのはちょうど $\lambda\beta+\lambda\gamma=1$ のとき、すなわち

$$\lambda=\frac{1}{\beta+\gamma}.$$

のときである。（これには $\beta+\gamma\neq 0$ が必要である。$\beta+\gamma=0$ ならば $\overrightarrow{AP}=\beta(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ は BC に平行となり D は存在しないので、問題文は暗に $\beta+\gamma\neq 0$ を仮定している。）よって

$$\mathbf{d}=\frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

である。ここで

$$\overrightarrow{BD}=\mathbf{d}-\mathbf{b}=\frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-(\beta+\gamma)\mathbf{b}}{\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC}=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\frac{(\beta+\gamma)\mathbf{c}-\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

どちらも同じベクトル $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ の実数倍であるから $\beta\overrightarrow{BD}=\gamma\overrightarrow{DC}$ となり、$\beta\neq 0$ なので

$$BD:DC=\gamma:\beta,$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

E と F も同じ方法で求めるが、今度は対象となる直線が CA（$\mathbf{c}$ の実数倍）と AB（$\mathbf{b}$ の実数倍）である。

考えてみよう 点 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ が直線 CA 上にあるかどうかは、どのように判定できるだろうか？

直線 CA は原点 A を通り方向 $\mathbf{c}$ をもつので、その上の点はちょうど $\mathbf{c}$ の実数倍である。つまり $\mathbf{b}$ の係数が 0 でなければならない。同様に、点が AB 上にあるのは、その $\mathbf{c}$ の係数が 0 のときに限る。

E を求める。 直線 BP 上の一般の点は

$$\mathbf{b}+\mu(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-\mathbf{b})=(1-\mu(1-\beta))\mathbf{b}+\mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

である。$\mathbf{b}$ の係数を 0 とおくと $\mu=1/(1-\beta)$ を得る（$\beta\neq1$ が必要である。$\beta=1$ ならば $\overrightarrow{BP}=\gamma\mathbf{c}$ は CA に平行となり E は存在しない）。よって

$$\mathbf{e}=e\,\mathbf{c},\qquad e=\frac{\gamma}{1-\beta}.$$

である。このとき $\overrightarrow{CE}=(e-1)\mathbf{c}$、$\overrightarrow{EA}=-e\,\mathbf{c}$ であり、$\gamma\neq0$ より $e\neq0$ であるから

$$\frac{CE}{EA}=\frac{e-1}{-e}=\frac{1-e}{e}=\frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)}=\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

F を求める。 B と C の役割を入れ替える（すなわち $\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{c}$ および $\beta\leftrightarrow\gamma$ と入れ替える）と、$\gamma\neq1$ のもとで、直線 CP は AB と $\mathbf{f}=f\,\mathbf{b}$（ただし $f=\beta/(1-\gamma)$）で交わる。このとき $\overrightarrow{AF}=f\,\mathbf{b}$、$\overrightarrow{FB}=(1-f)\mathbf{b}$ であり、$\beta+\gamma\neq1$ より $1-f=(1-\beta-\gamma)/(1-\gamma)\neq0$ である。よって

$$\frac{AF}{FB}=\frac{f}{1-f}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

積。 中央の因数に小問 (ii) を用いると

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}=1,$$

となる。ここで $\beta\neq0$、$\gamma\neq0$、$\beta+\gamma\neq1$ であるから、約分した因数はすべて 0 でない。これが求める結果である。（これは符号付き比について成り立つので、長さそのものの比についても成り立つ。）

検算

- 重心（centroid）：$\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ とすると P は重心になる。このとき $BD:DC=1:1$、$CE/EA=\frac{1/3}{1/3}=1$、$AF/FB=1$ であり、3 本のチェバ線（cevian）はすべて中線（median）となる。これは当然そうあるべき結果である。

- $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$C = (1.5,3)$、$\beta = 0.3$、$\gamma = 0.4$（上の図）とすると、$D = (2.571, 1.714)$、$E = \frac{4}{7}\mathbf{c}$、$F = (2,0)$ となり、$\frac{AF}{FB} = 1$、$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$、$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{4}$ で、積は 1 である。
- D, E, F の式、3 つの符号付き比、およびその積を、1700 個を超えるランダムな三角形とランダムな β, γ について、三角形の外側にある点 P も含めて（分数を用いて）厳密に確かめた。

よくある間違い

- (i) の軌跡を線分 BC と答えてしまう：s と t は正に制限されていないので、軌跡は直線全体である。
- 比を逆にしてしまう：$\overrightarrow{BD}$ は $\mathbf{c}$ の係数である γ に比例するので、γ が大きいと D は C の側に引き寄せられる。
- BP と CP に沿った媒介変数が、原点からではなく B と C から測られていることを忘れる。

STEP のその先へ

小問 (iii) はチェバの定理（Ceva's theorem）であり、$(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$ は三角形 ABC に関する P の**重心座標**（barycentric coordinates）である。これらは三角形 PBC, PCA, PAB の面積に比例し、3 つの比はそれらの面積の商にほかならない。重心座標はアフィン幾何（affine geometry）、すなわち直線や直線上の比は意味をもつが長さや角は意味をもたない幾何の自然な舞台であり、コンピュータグラフィックスや有限要素法（finite-element method）にも再び登場する。基底（basis）に関する座標が体系的に扱われる様子を見るには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。