解答例

STEP II 2007、第 7 問

純粋数学 ・ イェンセンの不等式

STEP II 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.3 節「凸性の威力」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/convexity.html

鍵となる考え方

イェンセン（Jensen）の不等式（Jensen's inequality）によれば、凹関数（concave function）に対しては、値の平均は平均における値以下である。各小問は、どの凹関数を用い、どの数の平均をとるかを見抜くことに帰着する。三角形の場合、角の和は一定なので、その平均はわかっている。相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の場合は、対数によって積が和に変わる。そのうえで (a) と (b) では、AM–GM に代入する適切な数の組を、定数も含めて選ぶ必要がある。

解答

凹性

$f(x) = \sin x$ とすると $f''(x) = -\sin x$ である。$0 < x < \pi$ では $\sin x > 0$ なので $f''(x) < 0$ となり、$\sin x$ はそこで凹である。

$f(x) = \ln x$ とすると $f'(x) = 1/x$、$f''(x) = -1/x^2$ である。これはすべての $x > 0$ で負なので、$\ln x$ は $x > 0$ で凹である。

小問 (i)

三角形の角は $A, B, C > 0$ かつ $A + B + C = \pi$ を満たすので、それぞれ $(0, \pi)$ に属し、そこで sin は凹である。$n = 3$ としてイェンセンの不等式を用いると

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

両辺に 3 を掛けて

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となり、示された。等号が成り立つのは $A = B = C = \pi/3$、すなわち正三角形のときに限る。

小問 (ii)

$x > 0$ で凹である $f(x) = \ln x$ をとり、$x_k = t_k > 0$ とおく。イェンセンの不等式より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左辺は $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$ である。e^x は増加関数なので、不等号の向きを変えずに両辺の指数をとることができ、

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}$$

を得る。等号は $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ のとき、かつそのときに限り成り立つ。（$n = 1$ のときは自明に等号となり、これと矛盾しない。）

(a)

考えてみよう どの 4 つの数の平均をとればよいか？

左辺は 4 項からなるので、$n = 4$ とする。相乗平均（geometric mean）から xyz が出てくる必要があり、x^4, y^4, z^4 を用いれば $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$ となる。定数 16 を 4 つ目の項とすると、$\sqrt[4]{16} = 2$ である。そこで、すべて正である $t_1 = x^4$、$t_2 = y^4$、$t_3 = z^4$、$t_4 = 16$ をとると

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz$$

となる。ここで 4 乗根をとる際に $x, y, z > 0$ を用いた。両辺に 4 を掛けて

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz$$

となり、示された。等号成立には $x^4 = y^4 = z^4 = 16$、すなわち $x = y = z = 2$ が必要である。

(b) 今度は 5 乗なので、$n=5$ とし、x^5, y^5, z^5 を数の組に含めたい。5 乗根からちょうど xyz を得るには、残りの 2 つの数の積が 1 でなければならない。自然な選び方は $t_4 = t_5 = 1$ である：

$$\frac{x^5+y^5+z^5+1+1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5y^5z^5\cdot 1\cdot 1} = xyz.$$

整理すると、すべての正の x, y, z に対して

$$x^5+y^5+z^5-5xyz \geq -2$$

が成り立つ。

考えてみよう これで最小値が -2 であることが示されたか？

これだけでは示されていない。下界は、実際に達成されるときに限って最小値となる。AM–GM の等号は 5 つの数がすべて等しいとき、すなわち $x^5 = y^5 = z^5 = 1$、つまり $x = y = z = 1$ のときに成り立つ。このとき式の値は $1+1+1-5 = -2$ である。したがって最小値は

$$\boxed{-2}, \quad \text{達成されるのは} x = y = z = 1.$$

検算

- (i) で直角二等辺三角形をとると $1 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$ となり、$3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$ を下回る。200 000 個の三角形を無作為に抽出しても、2.598 を超えることは一度もなかった。
- (a) で $x = y = z = 2$ のとき、両辺はともに 64 になる。
- (b) で、無作為な初期点から数値的に最小化を行うと、常に値 -2 をとる $(1,1,1)$ に収束した。また、$x = y = z = 1.1$ のとき $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$ である。

よくある間違い

- 指数をとっても不等式が保たれるのは e^x が増加関数だからにほかならない、という点を忘れること。一言触れておくべきである。
- (b) で「≥ -2」で止めてしまい、-2 に達する x、y、z の値を示さないこと。
- x^5, y^5, z^5 に $n=3$ の AM–GM を用いること。これでは $x^5+y^5+z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$ となり、$5xyz$ とうまく比較できない。

STEP のその先へ

イェンセンの不等式は凸（convex）関数（あるいは凹関数）についての命題であり、その本来の居場所は解析学と確率論である。期待値（expectation）の言葉で書けば、凹関数 f に対して $\mathrm{E}[f(X)] \le f(\mathrm{E}[X])$ となる。(a) と (b) で用いた工夫、すなわち相乗平均がうまく出てくるように定数を補うという手法は、重み付き相加平均・相乗平均の不等式（weighted AM–GM）やヘルダー（Hölder）の不等式の理論の出発点である。不等式と凸性についてさらに学ぶには、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を、確率論的な形については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。