解答例

STEP II 2007、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2007、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q6

鍵となる考え方

小問 (i) では、導関数（derivative）の分母がともに $\sqrt{3+x^2}$ となる二つの関数が与えられている。これらを適切に組み合わせると、その導関数が $\sqrt{3+x^2}$ そのものの定数倍になるので、積分（integral）はおのずと求まる。小問 (ii) の微分方程式（differential equation）は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ についての二次方程式である。この二次方程式を解くと二つの通常の一階微分方程式が得られ、そのいずれを解くにも、ちょうど小問 (i) の積分が必要になる。

解答

小問 (i)

$s=\sqrt{3+x^2}$ とおく。すると、すべての実数 x に対して $s>0$ であり、$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{s}$ である。また $s>|x|$ であるから $x+s>0$ であり、したがって対数はすべての x で定義される。

合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\frac{x}{s}}{x+s}=\frac{\frac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

積の微分法（product rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

考えてみよう この二つの導関数から、どうすれば $\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$ が得られるか。

$\dfrac{3+x^2}{s} = s$ であるから、分母 s の上に分子 $3+x^2$ がくる形にしたい。二つ目の導関数の分子は $3+2x^2$ である。これに一つ目の導関数の 3 倍を加えると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs + 3\ln(x+s)\Big) = \frac{3+2x^2+3}{s} = \frac{2(3+x^2)}{s} = 2\sqrt{3+x^2}.$$

したがって

$$\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{3}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,) + C.$$

小問 (ii)

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とおく。与えられた方程式は p についての二次方程式 $3p^2+2xp-1=0$ であるから、

$$p = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+12}}{6} = \frac{-x \pm \sqrt{3+x^2}}{3}.$$

判別式（discriminant）$4x^2+12$ は常に正であるから、各 x において異なる二つの実数解がある。その差 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$ は決して 0 にならないので、解が途中で一方の根から他方の根へ乗り換えることはできない。（導関数は中間値の性質（intermediate value property）をもつので、常に $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 以上離れている二つの値の間を跳び移ることはできない。）よって、どの解もすべての x について

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

のいずれかを満たす。小問 (i) を用いて積分すると、

$$y = -\frac{x^2}{6} \pm \left(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)\right) + C.$$

$x=1$ では $\sqrt{3+x^2}=2$、$\ln(x+\sqrt{3+x^2}) = \ln 3$ である。

符号 $+$ をとる場合：$y(1)=0$ より $0 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3 + C$ であるから、$C = -\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln 3$ である。対数をまとめると、

$$y = \frac{x\sqrt{3+x^2}-x^2-1}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

符号 $-$ をとる場合：$y(1)=0$ より $0 = -\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 3 + C$ であるから、$C = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$ であり、

$$y = \frac{3-x^2-x\sqrt{3+x^2}}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

これらが $(1,0)$ を通る二つの解であり、どちらもすべての実数 x で有効である。

検算

- それぞれの答えに $x = 1$ を代入すると、分数の部分は $\frac{2-1-1}{6} = 0$（または $\frac{3-1-2}{6} = 0$）となり、$\ln \frac{1+2}{3} = 0$ である。よって、どちらでも $y(1) = 0$ である。
- p の二つの根の和は $-\frac{2x}{3}$ であるから、二つの解の和は $\frac{1-x^2}{3}$ になるはずである。実際、平方根と対数は打ち消し合い、ちょうど $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$ が残る。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{-1}^{2} \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$ が得られ、小問 (i) の公式と一致する。方程式の各分枝を $(1, 0)$ から $x = 4$ までルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で進めると $y \approx 0.584957$ および $y \approx -5.584957$ が得られ、二つの公式と一致する。（その和は $-5 = \frac{1-16}{3}$ である。）

よくある間違い

- $3p^2 + 2xp = 1$ を p についての二次方程式として解かずに、線形として扱ったり、変数分離を試みたりすること。
- 二つの分枝に同じ定数 C を使うこと。符号ごとに別々の定数が必要であり、それぞれ $y(1) = 0$ によって定まる。
- $\sqrt{3+x^2}$ の前の係数 $\frac{1}{3}$ を忘れ、小問 (i) の積分を誤った倍率で使ってしまうこと。

STEP のその先へ

$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ のように導関数について線形でない方程式は**陰的**（implicit）であるという。ある点を通る解は複数ありうり、p についての方程式の根それぞれに一つずつ対応する。二つの根が一致するところでは、**特異解**（singular solution）が現れることがある（クレローの方程式（Clairaut's equation）のように、曲線族の包絡線となるもの）。ここでは根が一致することはないので、解はちょうど二つである。小問 (i) に現れた $\ln(x + \sqrt{3+x^2})$ は $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$ に定数を加えたものであり、この積分は実は標準的な置換 $x = \sqrt{3}\sinh u$ を姿を変えて行っているのである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、一階微分方程式と、その解の存在と一意性を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。