解答例

STEP II 2007、第 5 問

純粋数学 • 関数の反復合成

> **STEP II 2007、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q5

鍵となる考え方

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ という形は、$\tan B = \sqrt{3}$、すなわち $B = \frac{\pi}{3}$ とした $\tan(A+B)$ の加法定理（compound-angle formula）そのものである。したがって f は角に $\frac{\pi}{3}$ を加えるだけの操作であり、tan は周期（period）π をもつから、3 回繰り返すともとに戻る。小問 (iii) でも sin と $\frac{\pi}{6}$ を用いて同じ手法が使えるが、落とし穴がある。$\sqrt{1-t^2}$ が余弦になるのは角が $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ にあるときに限られ、このことが答えを変えてしまうのである。

解答

小問 (i)

$y = f(x) = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ とおく。すると $f^2(x) = \dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$ であり、分子と分母に $1-\sqrt{3}\,x$ を掛けると

$$f^2(x) = \frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

ここでもう一度 f を適用する。今度は $y = f^2(x)$ として、分子と分母に $1+\sqrt{3}\,x$ を掛けると

$$f^3(x) = \frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})} = \frac{4x}{4} = x.$$

よって f^3 は恒等写像（identity）である。（除外された 2 点は、まさに各段階が定義されるために必要なものである。$f(x)$ には $x \neq 1/\sqrt{3}$ が、$f^2(x)$ には $x \neq -1/\sqrt{3}$ が必要であり、f は $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$ をそれ自身の上へ写すので、操作を続けることができる。）

$2007 = 3 \times 669$ であるから

$$f^{2007}(x) = (f^3)^{669}(x) = x.$$

小問 (ii)

$x = \tan\theta$ とおく。$\tan\alpha$ が定義され、かつ $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$ を満たす任意の角 α について、$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ を用いた加法定理により

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan(\alpha + \tfrac{\pi}{3}).$$

$\alpha = \theta$ とすれば、これは $n = 1$ の場合である。$f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$ であるとすると、$\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$ としてこの式を適用して

$$f^{k+1}(x) = f(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)) = \tan(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi),$$

となるので、数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 n について $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$ が成り立つ。

途中で破綻することはない。この式が成り立たなくなるのは、ある角 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$ が π を法として $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{\pi}{6}$ と合同（congruent）になる場合だけであり、それは $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ または $\pm\frac{\pi}{2}$、すなわち $x = \pm 1/\sqrt{3}$ または x が無限大であることを意味するが、これらは除外されている。このことは小問 (i) の説明にもなっている。$\frac{\pi}{3}$ を 3 回加えると tan の周期である π を加えたことになるのである。

小問 (iii)

$|t| \leq 1$ であるから、$\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ として $t = \sin\varphi$ と書ける。

考えてみよう $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ はつねに $\cos\alpha$ に等しいだろうか？

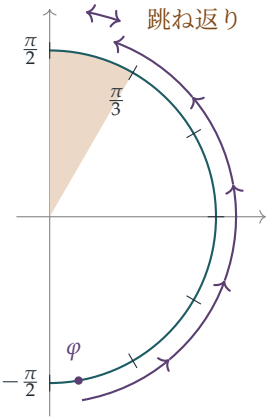
等しいのは $\cos\alpha \geq 0$ のときだけである。角 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ については問題ないので

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{6}). \qquad (*)$$

$(*)$ を再び適用するには、得られた答えを $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内の角の sin として書き直さなければならない。場合は 2 つある。

- $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ ならば、$\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ はすでに範囲内にある。
- $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ならば、$\alpha + \frac{\pi}{6}$ は $\frac{\pi}{2}$ を超えてしまうかもしれないが、$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\left(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right)$ であり、$\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ である。

($\alpha = \frac{\pi}{3}$ のときは、どちらも $\frac{\pi}{2}$ を与える。) したがって範囲内の角は、$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ に達するまで $\frac{\pi}{6}$ ずつ**上昇し**、それ以降は $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$ によって**折り返される**。この折り返しはもう一度行うと元に戻るので、角は**2**つの値の間を行き来することになる。



g を**1**回適用するごとに、角は単位円の右半分を $\frac{\pi}{6}$ だけ回る。いったん影をつけた領域 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ に入ると、そこで行ったり来たりする。

ここで、必要な上昇の回数を m とする。すなわち $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$ を満たす最小の整数 $m \geq 0$ である。$\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$ であるから $m \leq 5$ であり、t を用いて表すと次のようになる。

t	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$[0, \frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 0)$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
m	0	1	2	3	4	5

$\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ かつ $\varphi_0 = \varphi$ として、$g^n(t) = \sin\varphi_n$ と書く。$n \leq m$ のときは、それ以前の角はすべて $\frac{\pi}{3}$ 未満であったから、$\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$ である。すると $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ であるから、$\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$、$\varphi_{m+2} = \varphi_m$ というように、以後は交互に繰り返す。$\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6})$ であるから、$\varphi = \arcsin t$ とし、m を表から定めると、次を得る。

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin(\varphi + \frac{n\pi}{6}), & n \leq m+1, \\ \sin(\varphi + \frac{m\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ が偶数}, \\ \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ が奇数}. \end{cases}$$

特に、すべての t とすべての $n \geq 5$ について $g^{n+2}(t) = g^n(t)$ が成り立つ。

たとえば $t = 0$ では $\varphi = 0$、$m = 2$ であり、軌道は $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$ となる。

検算

- $x = 1$ のとき：$f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$、$f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$、そして $f(\sqrt{3}-2) = 1$ であり、これらは $\tan\frac{\pi}{4}$、$\tan\frac{7\pi}{12}$、$\tan\frac{11\pi}{12}$ と一致する。
- 直接計算すると $g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$、$g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、跳ね返りは実際に起こる。$g^5(0)$ を素朴に $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ と予想するのは誤りであり、繰り返し計算すると 1 になる。
- 数値的にも、ランダムに選んだ 5000 個の $t \in [-1,1]$ から始めて g を 19 回繰り返したところ、枠で囲んだ式と 2×10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- (iii) の答えを、すべての n について $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$ としてしまうこと。これは $\sqrt{1-t^2} \geq 0$ であるために角が決して $\frac{\pi}{2}$ を超えられないことを見落としている。
- f^2 の計算ミス。整理する前に、分子と分母の全体に $1-\sqrt{3}\,x$ を掛けること。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、2 つのメビウス変換の合成はそれらの行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の積に対応する。ここで f の行列は $2\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{smallmatrix}\right)$ であり、これは $\frac{\pi}{3}$ の回転（rotation）を定数倍したものである。その 3 乗は単位行列の定数倍になるので、$f^3(x) = x$ となるのである。小問 (iii) は力学系（dynamical systems）の世界をほんの少し味わわせてくれる。そこに現れるのは、周期的な点ではなく**最終的に周期的**（eventually periodic）な点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）には、メビウス変換の美しい幾何学的な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。