解答例

STEP II 2007、第 4 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2007、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q4

鍵となる考え方

加法定理（compound-angle formulae）ですべてを展開し、$\cos A \cos B$ で割る。すると方程式は $t = \tan A$ と $u = \tan B$ の関係式となり、tu の項、t の項、u の項、定数項をもつ。このような式が二つの一次式の積に因数分解（factorise）できるのは、「長方形を完成させる」操作で余りが出ないときであり、かつそのときに限る。そしてその余りは $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ の定数倍になることがわかる。三つの方程式はいずれも $\alpha = 2$、$\beta = \sqrt{3}$、$\gamma = 1$ であり、これらは条件を満たす。あとは A と B を正しく選ぶだけである。

解答

因数分解

加法定理により、

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A - B) + \beta \cos(A + B) - \gamma \sin(A + B)\\ &\quad = \alpha(\sin A \cos B - \cos A \sin B) + \beta(\cos A \cos B - \sin A \sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A \cos B + \cos A \sin B).\end{aligned}$$

$\cos A \cos B \neq 0$ であるから、これで割ってよい。$t = \tan A$、$u = \tan B$ とおくと、方程式は $P(t, u) = 0$ と同値である。ここで

$$P(t, u) = \alpha(t - u) + \beta(1 - tu) - \gamma(t + u) = -\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta.$$

である。$\beta \neq 0$ であるから、

$$m = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}.$$

とおく。すると $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\, t + \beta m\, u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$ となり、これは定数項を除いて P と一致する。したがって、すべての t と u に対して

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

が成り立つ。

十分性（*if*）。$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ のとき $(*)$ の定数項は消えるので、（$\beta \neq 0$ より）方程式は $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$ となる。ここで m と n は α, β, γ のみに依存する。

必要性（*only if*）。方程式が定数 m', n' を用いて $(t-m')(u-n') = 0$ に帰着されるとする。すなわち、$P(t,u) = 0$ が成り立つのは $t = m'$ または $u = n'$ のとき、かつそのときに限るとする。$c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$ とおき、$c \neq 0$ と仮定する。このとき任意の組 (m', u) が解となるので、$P(m', u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$ はすべての u に対して零になる。$m' \neq m$ ならば、これは u の定数でない一次関数であり、恒等的に零にはならない。$m' = m$ ならば、これは $c \neq 0$ に等しく、決して零にならない。いずれにしても矛盾であるから $c = 0$、すなわち $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ である。（「帰着される」を「P が $(t-m)(u-n)$ の定数倍である」と解釈する場合も、tu の係数を比較するとその定数倍は $-\beta$ でなければならず、やはり $(*)$ から $c = 0$ が従う。）

> **考えてみよう** 以下の小問で $\cos x = 0$ となり、割り算が許されない場合はどうなるだろうか。

$(*)$ の両辺に $\cos A \cos B$ を掛けて元に戻す。$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ のとき

$$\alpha \sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

が得られる。両辺はもはや正弦と余弦の組合せにすぎないので、この恒等式（identity）は**すべての** A と B に対して成り立つ（両辺は連続であり、$\cos A\cos B \neq 0$ のときは常に一致するからである）。$(**)$ を用いれば、$\cos A = 0$ の場合を別に扱う必要はない。

三つの小問すべてにおいて $\alpha = 2$、$\beta = \sqrt{3}$、$\gamma = 1$ であり、$\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$ である。よって

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

となり、方程式は $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$ となる。$\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$ ならば必ず $\cos A \neq 0$ である（そうでなければ $\sin A = 0$ にもなってしまう）ことに注意すると、これは $\tan A = -\sqrt{3}$ と同じことである。同様に、第二の括弧が零になるのは $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (i)

$A = x$、$B = \frac{1}{4}\pi$ ととると、$A - B = x - \frac{1}{4}\pi$、$A + B = x + \frac{1}{4}\pi$ となる。$\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから第二の括弧は零でなく、$\tan x = -\sqrt{3}$ でなければならない。よって

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{または} \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

小問 (ii)

今度は $A = x$、$B = \frac{1}{6}\pi$ である。ところが $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$ であるから、第二の括弧は $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ となる。$(**)$ より、左辺から右辺を引いたものは恒等的に零である。つまりこの方程式は恒等式であり、$0 \leq x < 2\pi$ を満たす**すべての** x がこれを満たす。

小問 (iii)

$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$ かつ $A + B = 3x$ となる必要がある。辺々を加えたり引いたりすると

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

となる。よって解は $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ または $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で与えられる。

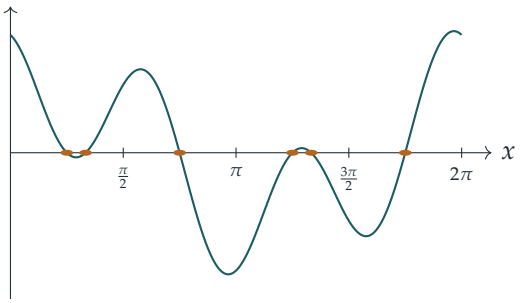
前者については、$2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$ より、整数 k に対して $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$ である。$[0, 2\pi)$ の範囲では $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ が得られる。

後者については、$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$ より $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$ であり、$x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ が得られる。

これら六つの値は相異なるので、解は

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$

である。



(iii) の左辺から右辺を引いたもののグラフは、印をつけた六つの点においてのみ零を横切る。

検算

- (i) で $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき：$2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$、$\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$、$\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$ であり、確かに $1.932 - 1.673 = 0.259$ である。
- (ii) で $x = 0$ を試すと：$2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$ となる。他のどの x でも成り立つ。
- (iii) で $x = \frac{1}{4}\pi$ のとき：$2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$、$\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$ である。$[0, 2\pi)$ 上で数値的に根を探索すると、ちょうど上の六つの根が見つかる。

よくある間違い

- (iii) で $A = x + \frac{1}{3}\pi$ とし、$3x$ から B を決めてしまう：$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$、$A + B = 3x$ を連立して解かなければならない。
- (iii) で $k = 0, 1$ で止めてしまい、解を落とす：$\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$ の周期は $\frac{1}{2}\pi$ であるから、この括弧からは四つの解が出る。
- (ii) が恒等式であることに気づかず、特定の解を探してしまう。

STEP のその先へ

式 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$ は円錐曲線（conic）の退化した場合にあたる。その零点集合は直角双曲線（rectangular hyperbola）であるが、行列式に似たある量が零になるときには二本の直線に分かれる。二次形式（quadratic form）がいつ因数分解できるかを判定することは、行列と固有値（eigenvalue）を用いて円錐曲線を分類する第一歩であり、大学一年次の線形代数で扱う話題である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の三角方程式がさらに載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。