解答例

# STEP II 2007、第 3 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2007、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q3

## 鍵となる考え方

すべては $1/(a^2+x^2)$ の標準的な積分に基づいている。したがって、この問題の要点は、置換（substitution）を行った後にその形を見抜くことにある。(i)(a) では、分子の $\cos x$ が $\sin x$ の導関数（derivative）になっていることが大きなヒントである。(i)(b) では、半角の置換（half-angle substitution）によって $1+\sin^2 x$ が $t$ の 4 次式（quartic）に変わる。ここで大切なのは、同じ操作を逆向きにたどれることに気づくことである。すなわち (ii) では、新しい 4 次式を生み出すのがどの三角関数の積分なのかを見抜くのである。

## 解答

### 標準的な積分

$a \neq 0$ とし、$-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ として $x = a\tan\theta$ とおく。$\theta$ がこの区間を動くとき、（$a$ の符号によらず）$x$ はすべての実数をちょうど 1 回ずつとるので、この置換は正当であり、$\tan\theta = x/a$ より $\theta = \arctan(x/a)$ である。ここで $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

であるから、

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{定数} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{定数},$$

となり、示すべき式が得られた。

### 小問 (i)(a)

$u = \sin x$ と置換すると $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$ であり、$x$ が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき $u$ は 0 から 1 まで動く。$a = 1$ として標準的な積分を用いると、

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

### 小問 (i)(b)

$t = \tan\frac{1}{2}x$ とおくと、半角に関する標準的な結果

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

が成り立つ。最後の式は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$ から従う。積分区間の端 $x = 0$ と $x = \frac{1}{2}\pi$ は、それぞれ $t = 0$ と $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$ になる。次に、

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

これらを組み合わせると、因数 $1+t^2$ は完全に約分される：

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

両辺を 2 で割ると $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$ となり、示すべき式が得られた。（(i)(a) より、その値は $\pi/8$ である。）

### 小問 (ii)

**考えてみよう** 4 次式 $1+14t^2+t^4$ はどこから現れたのだろうか？

(i)(b) では、$6t^2$ は $1+t^2$ を 2 乗して得られる $2t^2$ と、$\sin^2 x$ から得られる $4t^2 = (2t)^2$ の和として現れた。$14t^2$ を得るには、さらに $12t^2 = 3(2t)^2$ が必要である。すなわち、$\sin^2 x$ の代わりに $3\sin^2 x$ を考えればよい。実際、$t = \tan\frac{1}{2}x$ とすると、

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

したがって、$1+\sin^2 x$ の代わりに $1+3\sin^2 x$ を用いて (i)(b) とまったく同じ計算を行うと、

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

が得られる。左辺は (i)(a) と同様に $u = \sin x$ として計算する：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

ここで $a = 1/\sqrt{3}$ として標準的な積分を用いた。これを半分にして、

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

## 検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、$I \approx 0.785398$（これは $\pi/4$ である）、(i)(b) の積分は $\approx 0.392699$（これは $\pi/8$ である）、(ii) の積分は $\approx 0.302300$ となり、$\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$ と一致する。簡単な妥当性の確認もしておこう。4 次式を含む 2 つの被積分関数（integrand）はどちらも $t = 0$ で 1、$t = 1$ で 0 になり、分母に $14t^2$ を含む方は区間全体で値が小さい。したがって、その積分は $\pi/8 \approx 0.393$ より小さいはずであり、実際にそうなっている。

## よくある間違い

- $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $\frac{2}{1+t^2}$ を忘れ、(i)(b) で因数 2 を落としてしまう。
- 因数 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ を付けずに $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$ と書いてしまう。先に 3 をくくり出すか、$v = \sqrt{3}u$ と置換するとよい。
- 置換の後も積分区間を $x$ のままにしてしまう。$x = \frac{1}{2}\pi$ に対応するのは $t = 1$ である。

## STEP のその先へ

もっと直接的な方法もある。分子と分母を $t^2$ で割り、$v = t + 1/t$ とおくと、$\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$ は $-\frac{1}{v^2+k-2}$ に変わり、これもまた arctan 型の積分になる。$\sin x$ と $\cos x$ の有理関数（rational function）は、$t = \tan\frac{1}{2}x$ という置換によって必ず $t$ の有理関数になり、したがって原理的には必ず積分できる。この一般的な教訓は、初等関数による積分の体系的な理論の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたい人は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。