解答例

STEP II 2007、第 2 問

純粋数学 • 3 次曲線と面積

> **STEP II 2007、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q2

鍵となる考え方

三次関数（cubic）の極値点（turning points）に関する情報は、すべてその導関数（derivative）に詰まっている。極値点が $x = p$ と $x = q$ にあるのだから、導関数は $(x-p)(x-q)$ の定数倍でなければならず、係数比較（comparing coefficients）によって b と c がただちに求まる。その後、$m - n$ を求める最もすっきりした方法は、導関数を極値点の間で積分することである。また、$y - n$ が $x = q$ で**重根**（double root）をもつことに気づけば、面積の計算も容易になる。

解答

小問 (i)

微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

この二次式は極値点 $x = p$ と $x = q$ で 0 になり、最高次の係数は 6 であるから、

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x-p)(x-q) = 6x^2 - 6(p+q)x + 6pq.$$

係数を比較して、

$$b = 3(p+q), \qquad c = 6pq.$$

後で使う事実を二つ挙げておく。第一に、x^3 の係数が正であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x-p)(x-q)$ は二つの根の外側で正、根の間で負となる。よって曲線は増加、減少、増加の順に変化する。すなわち極大（maximum）が先に来て、$p < q$ である。

第二に、条件 $n > 0$ によって q が制限される。$x = q$ を代入すると、

$$n = 2q^3 - 3(p+q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

であるから、$n > 0$ は $q < 3p$ を意味する。以上をまとめると $0 < p < q < 3p$ である。

小問 (ii)

曲線は原点を通り、

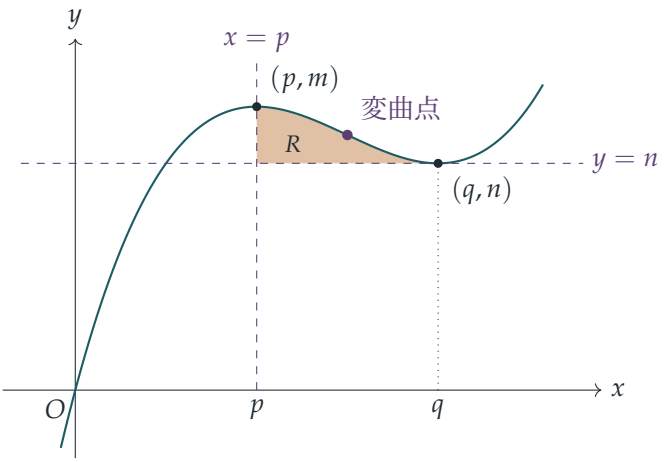
$$y = x(2x^2 - bx + c),$$

と表せる。ここで二次の因数の判別式（discriminant）は

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p - q)(p - 3q).$$

である。$q < 3p$ かつ $p < q < 3q$ であるから、一つ目の括弧は正、二つ目は負となり、判別式は負である。したがって、曲線が x 軸と交わる点は原点のみである。よって曲線は $-\infty$ から上がってきて O で軸を横切り、極大点 (p, m) まで上昇し、軸より上にある極小点（minimum）(q, n) まで下降し、その後はどこまでも上昇する。

変曲点（point of inflection）は $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$ となる点、すなわち $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$ であり、二つの極値点のちょうど中間にある。



領域 R（網掛け部分）は $x = p$ と $x = q$ の間にあり、曲線の下側かつ直線 $y = n$ の上側にある。曲線は極小点で $y = n$ に接している。

対称性。$s = \frac{1}{2}(p+q)$、$h = q - p$ とし、$x = s + t$ とおいて変曲点から測ることにする。すると $x - p = t + \frac{1}{2}h$、$x - q = t - \frac{1}{2}h$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\left(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\right),$$

となり、これは t の偶関数（even function）である。したがって、これを 0 から積分したもの、すなわち $y-y(s)=2t^3-\frac{3}{2}h^2t$ は t の奇関数（odd function）である。よって $y(s+t)-y(s)=-\big(y(s-t)-y(s)\big)$ が成り立つ。つまり曲線は**変曲点に関して位数 2 の回転対称性**（rotational symmetry of order 2）をもつ（その点のまわりの半回転によって曲線は自分自身に移る）。特に、この半回転は二つの極値点を入れ替えるので、変曲点は (p,m) と (q,n) の中点、すなわち $\big(\frac{1}{2}(p+q),\frac{1}{2}(m+n)\big)$ である。

小問 (iii)

極大値から極小値への落差は、傾き（gradient）の積分である：

$$m-n=y(p)-y(q)=-\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう 展開せずに $\int_p^q(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$ を手早く計算する方法はないだろうか？

$x=p+u$ と置換すると、$h=q-p$ として $x-q=u-h$ であり、u は 0 から h まで動く：

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u=\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}=-\frac{h^3}{6}.$$

よって

$$m-n=-6\Big(-\frac{(q-p)^3}{6}\Big)=(q-p)^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iv)

$p\le x\le q$ において曲線は m から n まで減少するので、$y=n$ 上またはその上側にあり、

$$\text{面積}R=\int_p^q(y-n)\,\mathrm{d}x.$$

である。三次式 $y-n=2x^3-bx^2+cx-n$ は $x=q$ で 0 になり、その導関数も同じ点で 0 になるので、$x=q$ は重根であり、ある r を用いて

$$y-n=2(x-q)^2(x-r)$$

と書ける。x^2 の係数を比較すると $-2(2q+r)=-b=-3(p+q)$ であるから、$r=\frac{1}{2}(3p-q)$ である。再び $h=q-p$ とし、$u=x-q$（$-h$ から 0 まで動く）とおくと、

$$x-r=u+q-\tfrac{1}{2}(3p-q)=u+\tfrac{3}{2}h.$$

したがって

$$\begin{aligned}\text{面積} R &= \int_{-h}^{0} 2u^2\left(u+\tfrac{3}{2}h\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^4 + hu^3\right]_{-h}^{0} \\ &= -\left(\tfrac{1}{2}h^4 - h^4\right) = \tfrac{1}{2}h^4 = \tfrac{1}{2}(q-p)^4,\end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

$p=1$、$q=2$ とする（$q<3p$ なので条件を満たす）。すると $b=9$、$c=12$ であり、$y=2x^3-9x^2+12x$ は $y'=6(x-1)(x-2)$ をもち、$m=y(1)=5$、$n=y(2)=4>0$ である。よって $m-n=1=(q-p)^3$ となる。変曲点は $(1.5,\,4.5)$ で、これは二つの極値点の中点である。また、$y-4$ を $[1,2]$ 上で数値積分すると $0.5000=\frac{1}{2}(q-p)^4$ が得られる。さらに、$0<p<q<3p$ を満たす 2000 組のランダムな組についても、四つの結果すべてを確認した。

よくある間違い

- $q<p$ としてしまう。三次の係数が正ならば、極大点は常に極小点の左側にある。
- $y-n$ ではなく y を積分してしまう。これでは直線 $y=n$ の下にある高さ n の長方形の分が加わってしまう。
- 対称性を直線 $x=\frac{1}{2}(p+q)$ に関する鏡映と説明してしまう。三次関数がもつのは点に関する半回転対称性であり、線対称性ではない。

STEP のその先へ

あらゆる三次関数のグラフは、その変曲点に関して半回転対称な曲線である。というのも、x を平行移動して x^2 の項を消去すると（カルダノ（Cardano）の公式で用いられる「被約三次式」（depressed cubic）への置換）、奇関数と定数の和が残るからである。小問 (iv) の重根の技法は、接触と根の重複度の理論の出発点であり、この理論は代数幾何学において中心的な役割を果たす。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。