解答例

STEP II 2007、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布の最大値

> **STEP II 2007、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q12

鍵となる考え方

手順についてのやや細かい説明はいったん忘れて、それぞれのさいころを単独で見てみよう。各さいころは初めて 6 の目が出るまで投げられ、実験は 2 つのさいころのうち**遅いほう**がそこに達した時点で終わる。したがって投げる回数は 2 つの独立な幾何分布（geometric distribution）に従う確率変数（random variable）の最大値であり、最大値は累積確率（cumulative probability）$\mathrm{P}(\max \le r)$ を通して扱うのがもっとも簡単である。

解答

小問 (i)

1 つ目のさいころで初めて 6 の目が出るのが何回目の投げかを X とし、2 つ目のさいころについても同様に Y を定める。さいころの各回の投げは他のすべての投げと独立（independent）であるから、X と Y は独立であり、それぞれ幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{最初の } r \text{ 回がすべて 6 以外}) = 1 - q^r.$$

手順はこれとどう対応するだろうか。どちらのさいころにも 6 の目が出ていない間は両方を投げ、一方に 6 の目が出たら、以後はもう一方だけを投げ続ける。いずれにせよ、各さいころはちょうど初めて 6 の目が出るまで投げられ（その後は投げられない）、両方に 6 の目が出た時点で終了する。両方が同じ回に初めて 6 の目を出す場合が、両方同時に 6 の目が出る場合にあたる。よって投げる回数は

$$N = \max(X, Y).$$

である。

考えてみよう $\mathrm{P}(N = r)$ を直接扱うのではなく、なぜ $\mathrm{P}(N \leq r)$ を扱うのだろうか。

事象 $N \leq r$ は単に「$X \leq r$ **かつ** $Y \leq r$」であり、独立性によってこれは積になる。一方、事象 $N = r$ は扱いにくい場合分け（一方のさいころが r 回目で終わり他方がそれより前に終わる場合、または両方が r 回目で終わる場合）に分かれてしまう。よって

$$\mathrm{P}(N \leq r) = \mathrm{P}(X \leq r)\,\mathrm{P}(Y \leq r) = (1 - q^r)^2,$$

であり、$r \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \leq r) - \mathrm{P}(N \leq r - 1) \\
&= (1 - q^r)^2 - (1 - q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1 - q^r) - (1 - q^{r-1})\right]\left[(1 - q^r) + (1 - q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

となる。ここでは平方の差の因数分解（difference of two squares）を用い、続いて $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1 - q) = pq^{r-1}$ を用いた。これが求める結果である。

期待値（expectation）を求めるため、確率を 2 つの部分に分ける：

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1 + q).$$

与えられた結果を微分する（あるいは x で割る）と、$|x| < 1$ に対して $\sum_{r \geq 1} r x^{r-1} = (1 - x)^{-2}$ が得られる。これを $x = q$ および $x = q^2$（$0 < p \leq 1$ のときどちらも 1 より小さい）に用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} r q^{r-1} - p(1 + q) \sum_{r=1}^{\infty} r (q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1 - q)^2} - \frac{p(1 + q)}{(1 - q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1 + q)}{p^2(1 + q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} \\
&= \frac{1 + 2q}{p(1 + q)},
\end{aligned}$$

となる。ここで $1 - q = p$ および $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$ を用いた。p だけで表すと（$q = 1 - p$ を代入して）

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

である。

小問 (ii)

多数回の実験では投げる回数の平均は $\mathrm{E}(N)$ に近いはずであるから、$\mathrm{E}(N) = m$ を解いて p を推定する：

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad \Longleftrightarrow \quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

よって

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

である。

? **考えてみよう** どちらの解を採るべきだろうか。

どの実験も少なくとも 1 回は投げるので、$m \geq 1$ である。すると（$m^2 - m = m(m-1) \geq 0$ であるから）$\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$ となり、プラスの符号をとる解は $(m+2)/m > 1$ 以上となって、確率としてはありえない。マイナスの符号をとる解は、同じ不等式により $m/m = 1$ 以下であり、また $(m+1)^2 > m^2 - m + 1$ であるから正である。よって推定値は

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

である。

検算

- $p = 1$ ならどの実験も 1 回で終わる：$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$ であり、$m = 1$ のとき $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$ となる。
- 確率の総和は 1 になる：$\sum_r \mathrm{P}(N = r)$ は項が打ち消し合って（telescoping）$\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$ となる。
- 公正なさいころでは、$p = \frac{1}{6}$ のとき $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$ となり、1 個のさいころが平均して必要とする 6 回より少し多い。これは当然そうあるべき結果である。200,000 回の実験のシミュレーションでは平均 8.71 が得られ、$\hat{p}$ の式に $m = 96/11$ を代入すると $\frac{1}{6}$ が返ってくる。

よくある間違い

- 各さいころの投げを別々に数えてしまう：2 つのさいころを同時に投げるのは 1 回の投げと数える。まさにこのために $N = \max(X, Y)$ となるのである。

- 項 $pq^{2r-2}(1+q)$ には $x=q$ ではなく $x=q^2$ での和が必要であることを忘れる。
- 小問 (ii) で、どちらが確率になりうるかを確かめずに両方の解を残してしまう。

STEP のその先へ

$\mathrm{P}(\max \le r) = \prod \mathrm{P}(X_i \le r)$ という技法は、独立な確率変数の最大値（および $\ge$ を用いれば最小値）を扱う標準的な方法であり、**順序統計量**（order statistics）の出発点である。小問 (ii) は**モーメント法**（method of moments）である。すなわち、標本平均（sample mean）を理論上の平均に一致させ、パラメータについて解く方法である。大学 1 年の統計学では、これを最尤法（maximum likelihood）と比較し、こうした推定量（estimator）がどれほど正確かを問う。確率の側面については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）が次の一歩として良い。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。