解答例

STEP II 2007、第 11 問

力学 • 3 次元の放物運動

> **STEP II 2007、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q11

鍵となる考え方

運動を一つの位置ベクトル（position vector）で表す。水平方向の速度は一定であり、重力の影響を受けるのは鉛直成分だけである。$\mathbf{r}(t)$ を書き下してしまえば、O からの距離は $|\mathbf{r}|$ にすぎず、最短距離は 2 次式を最小化することで求まる。最後の小問がうまくいくのは、弾丸が非常に速いため、弾丸が飛んでいる間に粒子がほとんど動かないからである。

解答

粒子を重力のみを受けて運動する質点としてモデル化し（$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、空気抵抗（air resistance）なし）、O を原点にとる。したがって B の位置ベクトルは $50\mathbf{i}$ である。

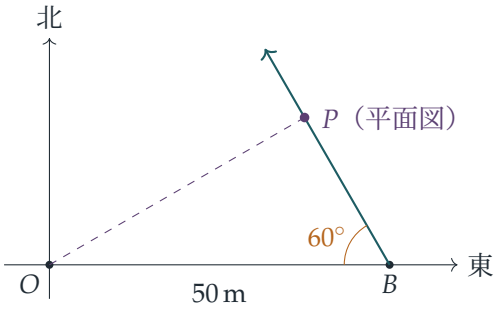
小問 (i)

初速度の成分。$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ならば $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$、$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である（辺の長さが 1、2、$\sqrt{5}$ の三角形）。よって初速度は

$$\text{水平方向の速さ} 25\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{鉛直方向の速さ} 25\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

をもつ。

水平方向の向きはどちらか。その向きは直線 OB と 60° をなす。もし粒子がおおむね東向き、つまり O から遠ざかる向きに進むなら、O のそばを通過することはありえない。O の北側を通過するためには、西向きかつ北向きに戻る方向へ進まなければならない。よって水平方向の向きは $\overrightarrow{BO}$（西向き）と北側で 60° をなし、その単位ベクトル（unit vector）は $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ である。



したがって水平方向の速度は

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

であり、重力は鉛直方向にはたらくので、これは一定のままである。鉛直方向については $z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$ である。出発点 $50\mathbf{i}$ を加えると、

$$\mathbf{r}(t)=(50-5\sqrt{5}\,t)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+(5\sqrt{5}\,t-5t^2)\mathbf{k}.$$

O からの距離。各成分を 2 乗して足し合わせると、

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2)+375t^2+(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

これを

$$\begin{aligned}25(t^2-\sqrt{5}\,t+10)^2&=25(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

と比べると、両者は一致する。よって $|\mathbf{r}|=5\,|t^2-\sqrt{5}\,t+10|$ である。2 次式 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$ の判別式（discriminant）は $5-40<0$ であるから、この 2 次式は常に正であり、絶対値（modulus）を外すことができる：

$$|\mathbf{r}|=5(t^2-\sqrt{5}\,t+10)\text{ m},$$

これが示すべきことであった。

点 P。平方完成（completing the square）すると、

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2+\tfrac{35}{4},$$

となるので、距離は $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき最小となり、最短距離は $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$ である。$t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ を代入すると、$\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$、$t^2=\frac{5}{4}$ であるから、

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\quad\text{（単位はメートル）}.$$

$\overrightarrow{OP}$ の水平部分は、東向き成分が $\frac{75}{2}$、北向き成分が $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ である。方位角（bearing）θ は北から時計回りに測るので、

$$\tan\theta = \frac{\text{東}}{\text{北}} = \frac{75/2}{25\sqrt{3}/2} = \sqrt{3},$$

であり、両成分とも正であるから $\theta = 60^\circ$ である。すなわち、O から見た P の方位角は 060° である。

小問 (ii)

速度の鉛直成分は

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

であり、これはちょうど $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ のときに 0 となる。これは粒子が P にいる時刻と同じであるから、粒子は P で最高点（高さ $\frac{25}{4}\,\mathrm{m}$）にある。

小問 (iii)

弾丸は O から P まで $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で直進し（弾丸にはたらく重力は無視する）、距離 $OP = \frac{175}{4}\,\mathrm{m}$ を進む。かかる時間は

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}.$$

である。

> **考えてみよう**　この余分な $\frac{1}{8}$ 秒の後、粒子はどこにいるか。

小問 (ii) より、P における粒子の鉛直方向の速度は 0 であるから、そこでの速度は純粋に水平方向で、その大きさは $10\sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。続く T 秒間に、粒子は水平方向に $10\sqrt{5}\,T$ 移動し、$\frac{1}{2}gT^2$ だけ落下する。$T = \frac{1}{8}$ とすると、

$$\text{水平方向の移動} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\mathrm{m}, \qquad \text{落下} = 5 \cdot \frac{1}{64} \approx 0.08\,\mathrm{m}.$$

これらは互いに直交しているので、P からの距離は

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\mathrm{m},$$

であり、示すべきとおりおよそ 3 m である。（落下はほとんど影響しない。答えは実質的に $10\sqrt{5}/8$ である。）射手は的を外す。

検算

▶ $t = 0$ のとき、公式は $5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{m}$ を与え、これは距離 OB である。よい。

- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$ であるから、P の位置ベクトルは最短距離と整合している。
- $|\mathbf{r}(t)|$ を数値的に走査すると、$t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ で最小値 43.75 m が得られ、粒子を P から 0.125 s だけ進めると、隔たりは 2.796 m となる。

よくある間違い

- 水平方向の向きを $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$（$O$ から遠ざかる向き）としてしまう。この場合、粒子は O の北側を通過することがなく、距離も与えられた式にならない。
- 方位角を 30° と答えてしまう。これは東から測った角であるが、方位角は北から時計回りに測るものである。

STEP のその先へ

小問 (iii) は迎撃問題（interception problem）の初歩版である。動く標的に命中させるには、標的が**これから**いる場所を狙わなければならず、そのためには発射方向と時刻の両方について $|\mathbf{r}_{\text{標的}}(t) - \mathbf{r}_{\text{弾丸}}(t)| = 0$ を解くことになる。$|\mathbf{r}(t)|$ を最小化することは、軌道や衝突の問題における「最接近距離」（distance of closest approach）の背後にある考え方でもあり、そこでは距離を 2 乗して多項式を得るのが定石の第一手である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この種のベクトルを用いた運動学が本格的に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。