解答例

STEP II 2007、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある静力学

> **STEP II 2007、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

鍵となる考え方

これは静力学（statics）の問題であり、厄介な要素は重心（centre of mass）の位置ただ一つである。G が軸上のどこにあるかがわかれば、接点のまわりのモーメント（moment）をとることで垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）がともに消え、P が直接求まる。次に水平方向に力を分解すると、摩擦力の大きさは P に等しいことがわかり、あとは摩擦の法則 $|F| \leq \mu R$ によって結論が得られる。絶対値（modulus）が現れるのは、α によっては P が押す向きにも引く向きにもなりうるからである。

解答

モデル

この立体を、平らな底面（円柱の自由端）の縁の最下点である一点 A で平面に接する剛体（rigid body）とみなす。この底面の最高点を B とすると、AB は長さ $2r$ の直径で、水平と角 α をなす。はたらく力は、重心 G にはたらく重力 W、A にはたらく垂直抗力 R と摩擦力 F、そして B にはたらく水平な力 P である。

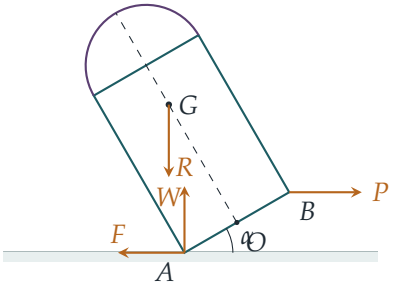
重心

距離は底面の中心 O から軸に沿って測る。円柱の体積は $3\pi r^3$ なので質量は $3\pi r^3\rho$ であり、重心は $\frac{3}{2}r$ の位置にある。半球の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$、密度は 3ρ なので質量は $2\pi r^3\rho$ である。半球の重心はその平らな面から $\frac{3}{8}r$ だけ先にあり、その平らな面は $3r$ の位置に

あるから、重心は $\frac{27}{8}r$ の位置にある。全質量は $5\pi r^3\rho$ であり、

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

よって G は軸上で底面から $\frac{9}{4}r$ の位置にあり、$W = 5\pi r^3\rho g$ である。



つり合い

A を原点とし、x を水平方向（A から B の真下の点に向かう向き）、y を鉛直上向きにとる。P の水平成分を X とし、これを x 方向の成分として表す。したがって X は正にも負にもなりうる。同様に、摩擦力を F として x 方向の成分で表す。

底面は A から $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ の向きに延びているので、$B = (2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$、$O = (r\cos\alpha,\, r\sin\alpha)$ である。軸は底面に垂直で、立体の内部に向かう $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ の向きをもつ。したがって G の水平座標は

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

である。

鉛直方向に力を分解すると $R = W$ である。水平方向に分解すると $F + X = 0$ なので、$|F| = |X|$ である。

考えてみよう どの点のまわりのモーメントをとるべきだろうか？

A のまわりである。こうすると R と F はモーメントをもたず、残るのは W と P だけになる。重力は G を通って鉛直にはたらくので、A のまわりのそのモーメントは Wx_G である（$x_G > 0$ のとき時計回り）。B にはたらく水平な力は高さ $2r\sin\alpha$ の位置にはたらくので、そのモーメントは $X\cdot 2r\sin\alpha$ である（$X < 0$ のとき反時計回り、$X > 0$ のとき時計回り）。時計回りを正とすると、

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

となる。ここで、$\sin\alpha$ で割ったが、これは $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より正である。

摩擦の条件

平面は粗く、立体は A で滑らないので、$|F| \leq \mu R$ が必要である。$|F| = |X|$ と $R = W > 0$ を用いると、

$$W\left|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha\right| \leq \mu W \quad \Longrightarrow \quad \mu \geq \left|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

となり、これが求める結果である。

X の符号から、P がどちら向きにはたらくかがわかる。$\tan\alpha > \frac{4}{9}$ ならば、G は A よりも B と反対側にあり、立体はそのままでは後ろ向きに倒れてしまうので、P は B を立体から離れる向きに引かなければならない。$\tan\alpha < \frac{4}{9}$ ならば、P は押さなければならない。いずれの場合も摩擦力は P と逆向きにはたらき、絶対値によって両方の場合がまとめて表される。

検算

- $\tan\alpha = \frac{4}{9}$ ならば $x_G = 0$ である。つまり G は A の真上にあり、立体はそれだけでつり合い、$P = 0$ となって摩擦力は必要ない。不等式は $\mu \geq |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$ となり、確かにそうなっている。
- $\alpha = 45°$ のとき、不等式は $\mu \geq \frac{5}{8}$ となる。
- 数値的に確かめると、立体を薄い円板に切り分けることで全質量 $5\pi\rho r^3$ と $OG = 2.2500r$ が得られる。また、10 000 個のランダムな α の値に対して三つのつり合いの式を直接解くと、毎回 $|F|/R$ が $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$ に等しくなる。

よくある間違い

- 半球の密度が三倍であることを忘れて、その質量を $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$ としてしまう。こうすると G の位置がずれ、定数 $\frac{9}{8}$ が変わってしまう。
- 半球の重心までの距離 $\frac{3}{8}r$ を、高さ $3r$ にある半球自身の平らな面からではなく、円柱の底面から測ってしまう。
- P の向き（あるいは摩擦力の向き）を決めつけてしまい、その結果として絶対値を落としてしまう。結果は P がどちら向きにはたらいても成り立たなければならない。

STEP のその先へ

複合体の重心を求めることは、体積積分（volume integral）$\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \big/ \int \rho\,\mathrm{d}V$ を離散的に映したものであり、そもそも半球の $\frac{3}{8}r$ もこの積分から導かれる。大学 1 年次の力学では、これは剛体の理論へと発展し、そこでは r^2 を $\mathbf{r}$ の代わりに用いた同じ積分によって慣性モーメント（moment of inertia）が得られる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この二つの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。