解答例

STEP II 2007、第 1 問

純粋数学 ・ 二項近似

> **STEP II 2007、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q1

鍵となる考え方

二項級数（binomial series）が速く収束（converge）するのは、小さいはずの量が本当に小さいときに限られる。したがって、この問題の要点は、根号を含む数（surd）を $\sqrt{1+\text{ごく小さな量}}$ の簡単な有理数倍として書き直すことにある。そのために、3 または 6 を掛けると 10 の累乗のすぐ近くになる完全平方数（perfect square）（または完全立方数（perfect cube））を探す。そうすれば k は 100（または 1000）に比べて小さくなり、わずかな項数で必要な精度が得られる。

解答

小問 (i)

$x = \frac{k}{100}$ とすると、$(1+x)^{1/2}$ の二項級数の係数（coefficient）は

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

である。$x = k/100$ を代入すると、

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{k}{200} - \frac{k^2}{80\,000} + \frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) $k = 8$ のとき左辺は $\sqrt{1.08}$ であり、要点は $108 = 3\times 36$ となることである。

$$\sqrt{1.08} = \frac{\sqrt{108}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{1.08}.$$

級数から

$$\sqrt{1.08} \approx 1 + 0.04 - 0.0008 + 0.000032 = 1.039232,$$

が得られ、したがって

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205\text{(小数第 5 位まで)}。$$

(b)

考えてみよう $1 + \frac{k}{100}$ がきれいな平方数の 6 倍になるのは、k がどんな値のときか？

ある整数 m について $100 + k = 6m^2$ となり、しかも $6m^2$ が 100 に近く k が小さくなるようにしたい。$6 \times 16 = 96$ であるから、$m = 4$、$k = -4$ とする。

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

$k = -4$ のとき、第 1 項以外のすべての項は負になる。

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

したがって

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949\text{(小数第 5 位まで)}。$$

この k の大きさは (a) の半分なので、無視した項はここではさらに小さい。($1.5 = 6/4$ から得られる $k = 50$ のような値でも $\sqrt{6}$ を正確に表せるが、$x = \frac{1}{2}$ では級数の収束が遅すぎて、小数第 5 位までの精度は得られない。)

小問 (ii)

最初の 2 項から

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

が得られる。

考えてみよう 3 を掛けると 1000 を少しだけ上回る立方数はどれか？

k を小さくして $1000 + k = 3m^3$ としたい。$1000/3 \approx 333$ に近い立方数は $6^3 = 216$ と $7^3 = 343$ であり、$3 \times 343 = 1029$ は 1000 に非常に近い。そこで $k = 29$ とする。

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

2 項までの近似を用いると、

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

となり、これが求める近似である。

検算

電卓によれば $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$、$\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$ であり、どちらの答えとも小数第 5 位まで一致する。小問 (ii) については、$3029/2100 = 1.44238\ldots$ であるのに対し $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$ である。約 1.3×10^{-4} の誤差は、無視した最初の項の大きさ $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$ と一致するので、この近似はわずかに過大評価である。

よくある間違い

- 第 3 の係数を間違える。$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)/6 = +\frac{1}{16}$ であり、$-\frac{1}{16}$ ではない。
- 級数を計算した後で、$\frac{5}{3}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{10}{7}$ を掛け戻すのを忘れる。
- 大きな k（(b) における $k = 50$ など）を選んでしまい、3 項や 4 項ではまったく足りなくなる。

STEP のその先へ

何項必要かという問題は、結局のところテイラー級数（Taylor series）の剰余項（remainder）を評価することに帰着する。ラグランジュ（Lagrange）の剰余項を用いれば、これらの近似が小数第 5 位まで正しいことを、単に信じるのではなく証明できる。級数が速く収束する範囲へと尺度を変えるという同じ工夫は、電卓やコンピュータのライブラリが実際に累乗根や対数を計算する方法でもある。テイラー級数とその剰余項の理論については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。