解答例

STEP I 2007、第 9 問

力学 ・ 斜面上の最大摩擦力

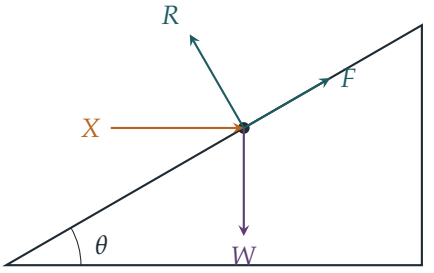
> **STEP I 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q9

鍵となる考え方

この問題は極限摩擦（limiting friction）の 2 つの場合であり、両者の違いは摩擦力の向きだけである。それぞれの場合について、斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解し、垂直抗力（normal reaction）を消去すると、各水平力が W と三角関数の式の比との積として表される。一方を他方で割ると W が消え、k、μ、θ だけの関係式が残る。不等式は、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ が決して $\frac{1}{2}$ を超えないという事実から導かれる。

解答

物体を質点（particle）とみなし、どちらの場合も摩擦は極限状態、すなわち $F = \mu R$ であると仮定する。計算を簡潔にするため、$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおく。



水平力は質点を斜面に押しつけるので、斜面に沿って上向きの成分 Xc と、斜面に押しつける向きの成分 Xs をもつ。重力は、斜面に沿って下向きの成分 Ws と、斜面に押しつける向きの成分 Wc をもつ。

滑り下りる直前：力 X

質点は滑り下りる直前にあるので、摩擦力 μR は斜面に沿って**上向き**に働く（図のとおり）。斜面に垂直な方向、次に斜面に平行な方向に力を分解すると、

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

R を代入すると、

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

滑り上がる直前：力 kX

今度は質点が滑り上がる直前にあるので、摩擦力は斜面に沿って**下向き**に働く。同様にして、

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

よって

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

考えてみよう ここで現れるものすべてで割ってよいのだろうか？

物理的な設定を考えれば、割ってよい。質点が滑り下りるのを防ぐために正の力 X が**必要**なのだから、この力がなければ質点は滑り下りる。これは $\tan\theta > \mu$、すなわち $s - \mu c > 0$ を意味する。すると (1) から $X > 0$ であり、$c + \mu s > 0$ はもともと成り立つ。水平に押すことで質点を斜面に沿って押し上げることがそもそも可能であるためには、(2) より $c - \mu s > 0$、すなわち $\tan\theta < 1/\mu$ が必要である。これらを合わせると $\mu < \tan\theta < 1/\mu$ となり、特に $\mu < 1$ である。これは最後に必要になる。

関係式

(2) を (1) で割ると、X と W がともに消える：

$$k\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

両辺を展開し、$s^2 + c^2 = 1$ を用いると、

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

したがって $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$ であり、これを整理すると

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

となり、示すべき式が得られた。

不等式

右辺は正であり（$\mu > 0$ かつ $k > 0$ より）、θ が鋭角なので $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$ も正である。よって $k > 1$ である（これは驚くことではない。質点を押し上げるには、支えておくよりも大きな力が要る）。さて、

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \leq \tfrac{1}{2},$$

であり、$(k-1)(1+\mu^2) > 0$ なので、この不等式の両辺にこれを掛けてよい：

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \leq \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

両辺を 2 倍し、k を含む項をまとめると、

$$2\mu k + 2\mu \leq k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad \Longrightarrow \quad k(1-2\mu+\mu^2) \geq 1 + 2\mu + \mu^2,$$

すなわち $k(1-\mu)^2 \geq (1+\mu)^2$ である。上で $\mu < 1$ を示したので $(1-\mu)^2 > 0$ であり、不等号の向きを変えずにこれで割ることができる：

$$k \geq \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

等号が成り立つのは $\sin 2\theta = 1$、すなわち $\theta = 45^\circ$ のときに限る。

> **考えてみよう** 最後のステップの前に、なぜ $\mu < 1$ を知っている必要があるのだろうか？

$\mu = 1$ ならば 0 で割ることになる（しかもその直前の行は $0 \geq 4$ となり、偽である）。$\mu > 1$ ならば割ること自体は許されるが、θ に関する条件がすでに成り立たなくなっている。物理的には、$\mu \geq 1$ のとき 2 つの要請 $\tan\theta > \mu \geq 1$ と $\tan\theta < 1/\mu \leq 1$ は互いに矛盾する。つまり、質点をそもそも支える必要がないか、あるいはどんな水平の押しでも質点を斜面に沿って動かし始めることができないかのどちらかである。したがって、この問題では暗に $\mu < 1$ が仮定されている。

検算

- $\mu = \frac{1}{2}$、$\theta = 45^\circ$ とすると $s = c = 1/\sqrt{2}$ である。(1) と (2) から $X = W \cdot \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$、$kX = W \cdot \frac{3/2}{1/2} = 3W$ となるので $k = 9 = (1.5/0.5)^2$ であり、これは等号の場合である。代わりに $\theta = 60^\circ$ とすると、同じ式から $k \approx 25.2 > 9$ が得られる。
- $\mu \to 0$ ならば $X = kX = W\tan\theta$ かつ $k \to 1$ となり、等式（両辺とも 0）とも下界 1 とも一致する。
- $\mu \in (0,1)$ と許容される θ を 10^5 通り無作為に選んで等式と不等式を数値的に検証したところ、成り立たない例は見つからなかった。

よくある間違い

- $R = W\cos\theta$ としてしまう。水平力も質点を斜面に押しつけており、垂直抗力に $X\sin\theta$ を加える。
- 2 つの場合で摩擦力の向きを同じにしてしまう。摩擦力は常に、これから起ころうとしている運動を妨げる向きに働く。
- $(1-\mu)^2$ が正である（そして 0 でない）理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

この問題を見通しよく理解するには、$\tan\lambda = \mu$ を満たす**摩擦角**（angle of friction）λ を用いるとよい。垂直抗力と極限摩擦力を合成すると、法線と角 λ をなす 1 つの力になり、(1) と (2) はそれぞれ $X = W\tan(\theta-\lambda)$、$kX = W\tan(\theta+\lambda)$ となる。よって $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$ であり、下界の不等式は、この比が $\theta = 45°$ で最小になるという主張にほかならない。この種の摩擦角を用いた議論や「摩擦円錐」（friction cone）の考え方は、大学の静力学（statics）や接触の理論で再び登場する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年次の講義で求められる丁寧さで、摩擦と力の解析を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。