解答例

STEP I 2007、第 8 問

純粋数学 • 3 次曲線の接し方

> **STEP I 2007、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q8

鍵となる考え方

2 つの曲線がある点で接する（touch）のは、交点を求める方程式がその点で重根（repeated root）をもつときであり、かつそのときに限る。そこで 2 つの 3 次関数の差を調べ、因数 $(x-2)^2$ が現れることを期待する。a を含む項の係数 $1, -6, 12, -8$ は $(x-2)^3$ の二項係数（binomial coefficients）であり、このことに気づけば因数分解（factorisation）も概形の描画もずっと容易になる。

解答

$(2,8)$ で接することと、もう 1 つの交点

a を含む項をまとめると、

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{よって} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \quad (*)$$

$y = x^3$ との交点は

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

の解である。ここで $x^3 - 12x + 16$ は $x = 2$ で 0 になり、割り算を実行すると $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$ を得る。したがって

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2[(a-1)x - 2a - 4]. \end{aligned}$$

$x = 2$ のとき両曲線はともに $(2,8)$ を通り、因数 $(x-2)^2$ は $x = 2$ が交点の方程式の重根であることを示している。同じことだが、傾き（gradient）も一致する。実際、$(*)$ よ

り $y' = 3a(x-2)^2 + 12$ であり、これは $x = 2$ で 12 となる。一方、その点での $y = x^3$ の傾きは $3 \cdot 2^2 = 12$ である。よって、a の値によらず、2 曲線は $(2, 8)$ で接する。

それ以外の交点は $(a-1)x = 2a + 4$ から得られる。

- $a \neq 1$ ならば $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$ であり、これは決して 2 にならない（そうなるには $2a + 4 = 2a - 2$ が必要である）。したがって、ほかの交点はちょうど 1 つで、

$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1} \right)^3 \right).$$

  である。

- $a = 1$ ならば、括弧内は定数 -6 となるので、ほかの交点は存在しない。

考えてみよう どちらの曲線が上にあり、それはどこでか？

この問いには因数分解がそのまま答えてくれる。$(x-2)^2 \geq 0$ であるから、$(*)$ から x^3 を引いたものの符号は、1 次因数 $(a-1)x - 2a - 4$ の符号と一致する。これにより、もう 1 つの交点のどちら側で曲線 $(*)$ が $y = x^3$ より上にあるかがわかり、概形を描くのに必要なことの大部分がそろう。

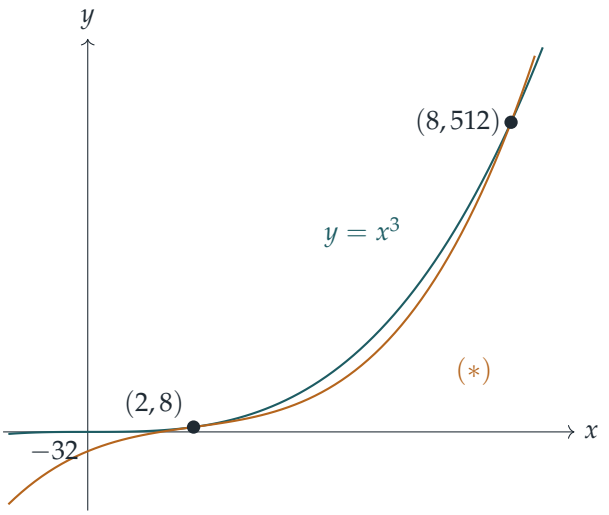
3 つの概形のいずれにおいても、$(*)$ は $(2, 8)$ に傾き 12 の変曲点（point of inflection）をもつ。$a \neq 0$ のとき、$y'' = 6a(x-2)$ がそこで符号を変えるからである。したがって $(*)$ と $y = x^3$ は $(2, 8)$ において共通の接線（tangent）$y = 12x - 16$ をもつ。その点で $y = x^3$ は下に凸（concave up）であるが、$(*)$ はそうではない。

小問 (i)：$a = 2$

このとき $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$ であり、

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

となる。もう 1 つの交点は $(8, 512)$ である。曲線 $(*)$ は $x < 8$ では $y = x^3$ の下にあり（$x = 2$ で接する）、$x > 8$ では上にある。傾き $6(x-2)^2 + 12$ はつねに正であるから、この曲線は単調増加で、極値をとる点（turning points）をもたない。y 軸とは $(0, -32)$ で交わり、x 軸とは $x \approx 1.37$ 付近で 1 回交わる。



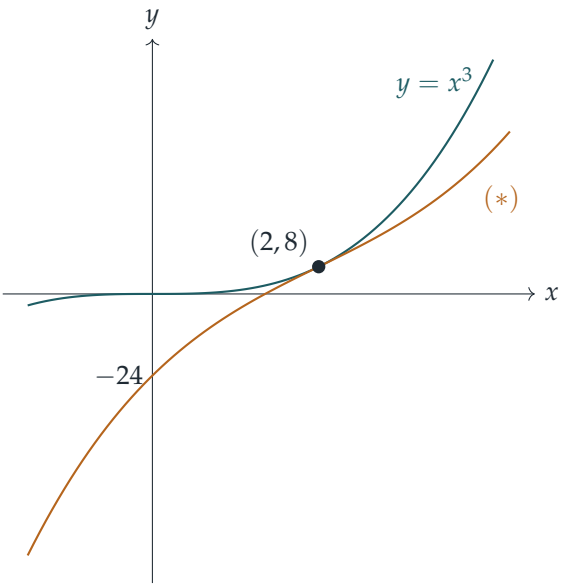
（縦方向の縮尺を大きく縮めているため、$(2,8)$ で接している様子は平らに見えるが、2 曲線はそこで共通の接線をもつ。）

小問 (ii)： $a = 1$

このとき $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$ であり、

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

となる。よって $(*)$ は、接点 $(2,8)$ を除くすべての点で $y = x^3$ の下にあり、ほかの交点はない。差 $6(x-2)^2$ は、$x = 2$ からどちらの方向へ離れても大きくなる。傾き $3(x-2)^2 + 12$ はつねに正であるから、$(*)$ は単調増加である。y 軸とは $(0,-24)$ で交わり、x 軸とは $x \approx 1.36$ 付近で 1 回交わる。



小問 (iii)： $a = -2$

このとき、もう 1 つの交点は $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$ であるから原点 $(0,0)$ であり、

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

となる。よって $(*)$ は $x < 0$ では $y = x^3$ の上に、$x > 0$ では下にあり、$(2,8)$ で接する。

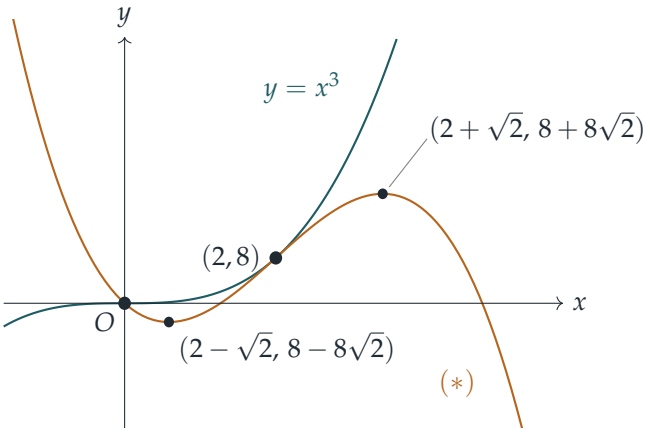
展開すると $y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$ となり、x 軸とは $x = 0$ および $x = 3 \pm \sqrt{3}$（およそ 1.27 と 4.73）で交わる。傾きは

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

であり、これは $(x-2)^2 = 2$、すなわち $x = 2 \pm \sqrt{2}$ のとき 0 になる。代入すると、

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad (\text{極小}),$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad (\text{極大}).$$

最高次の係数（leading coefficient）が負であるから、$x \to -\infty$ のとき $y \to +\infty$、$x \to +\infty$ のとき $y \to -\infty$ である。原点において $(*)$ の傾きは -12 であるのに対し、$y = x^3$ の傾きは 0 であるから、2 曲線はそこで確かに交差する。



検算

- $x=2$ のとき、$(*)$ はすべての a に対して $a\cdot 0+24-16=8$ を与え、また $y'=12$ であり、$y=x^3$ と一致する。
- $a=2$、$x=8$ のとき、整理した形から $2\cdot 6^3+96-16=512=8^3$ となり、点 $(8,512)$ が確認できる。
- $a=0$ のとき、$(*)$ は接線 $y=12x-16$ そのものであり、公式はもう 1 つの交点を $x=-4$ と与える。実際 $x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$ である。
- 因数分解は、数千組の無作為な有理数 a と x について厳密に確かめた。また小問 (iii) の極値 $8\pm 8\sqrt{2}\approx 19.31,\ -3.31$ も数値的に確かめた。

よくある間違い

- $a=1$ の場合を忘れること。このときもう 1 つの交点が存在しないため、その公式は破綻する。
- 両曲線が $(2,8)$ を通ることだけを示して終えること。接するためには傾きが等しいこと、あるいは同値なこととして重根をもつことも必要である。
- 小問 (iii) で、2 曲線が原点で接するように描くこと。実際には傾きが異なり、そこで交差している。

STEP のその先へ

$f(x) - g(x)$ の重根は、接することの代数的な影である。すなわち、その点で 2 曲線は 1 次の近似まで一致する。この考えをさらに推し進めると、接触の位数（order of contact）とは何階の導関数までが一致するかを数えるものであり、これはテイラー多項式（Taylor polynomials）の背後にある考え方である。テイラー多項式とは、ある点において関数と可能な限り高い位数で接触する多項式のことである。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）はテイラーの定理を丁寧に展開している。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、STEP 形式の曲線の概形描画の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。