解答例

STEP I 2007、第 7 問

純粋数学 • 直線間の距離

> **STEP I 2007、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q7

鍵となる考え方

各直線上の一般の点を書き下し、差をとって長さを 2 乗する。すると D^2 は 2 つのパラメータについての二次式（quadratic）になる。ここでの工夫は、その二次式を平方和（sum of squares）の形に書き直すことである。平方和は、各平方がそれぞれ取りうる最小の値をとるときに最小となるからである。小問 (ii) でも同じ方法が使え、k の値によって平方の分かれ方が変わる様子から、図形的な状況が読み取れる。

解答

小問 (i)

L_1 上の一般の点は $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$、$L_2$ 上の一般の点は $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$ である。よって

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

であり、

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

係数ごとに項を整理すると

$$\mu^2:\ \ 1+4+4=9, \qquad \lambda^2:\ \ 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu:\ \ -4-8-12=-24,$$
$$\mu:\ \ 6-8-28=-30, \quad \lambda:\ \ -12+8+42=38, \quad \text{定数}:\ \ 9+4+49=62,$$

となるので、$D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$ である。

次に、与えられた形を展開する。

$$\begin{aligned}(3\mu - 4\lambda - 5)^2 + (\lambda - 1)^2 + 36 &= (9\mu^2 + 16\lambda^2 + 25 - 24\lambda\mu - 30\mu + 40\lambda) \\ &\quad + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 36 \\ &= 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62.\end{aligned}$$

両者は一致するので、

$$D^2 = (3\mu - 4\lambda - 5)^2 + (\lambda - 1)^2 + 36,$$

が示された。

考えてみよう なぜ 2 つの平方を同時に 0 にできるのか？

各平方は 0 以上であるから、任意の λ、μ に対して $D^2 \geq 36$ である。等号が成り立つには $\lambda = 1$ かつ $3\mu = 4\lambda + 5 = 9$、すなわち $\mu = 3$ であることが必要である。この 2 つの条件は両立する（1 つ目で λ が定まり、続いて 2 つ目で μ が定まる）ので、$D^2 = 36$ は実際に達成される。したがって、2 直線間の最短距離は

$$D_{\min} = 6,$$

であり、これは

$$\lambda = 1 :\ P = (3,\ 2,\ -1) \quad \text{直線} L_1, \qquad \mu = 3 :\ Q = (7,\ 4,\ 3) \quad \text{直線} L_2.$$

において達成される。確認として、$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, 4)$ の長さは $\sqrt{16 + 4 + 16} = 6$ であり、しかも両方の方向ベクトル（direction vector）に垂直である。実際、$(4, 2, 4) \cdot (2, 2, -3) = 8 + 4 - 12 = 0$、$(4, 2, 4) \cdot (1, 2, -2) = 4 + 4 - 8 = 0$ である。これはまさに、2 直線を結ぶ最短の線分に期待される性質である。

小問 (ii)

L_3 上の一般の点は $P = (2,\ 3 + \alpha,\ 5)$、L_4 上の一般の点は $Q = (3 + 4k\beta,\ 3 + (1 - k)\beta,\ -2 - 3k\beta)$ である。よって

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 + 4k\beta \\ (1 - k)\beta - \alpha \\ -7 - 3k\beta \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned}D^2 &= (1 + 4k\beta)^2 + ((1 - k)\beta - \alpha)^2 + (7 + 3k\beta)^2 \\ &= ((1 - k)\beta - \alpha)^2 + 25k^2\beta^2 + 50k\beta + 50 \\ &= ((1 - k)\beta - \alpha)^2 + 25(k\beta + 1)^2 + 25,\end{aligned}$$

となる。ここで $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2=1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$ を用いた。

α は他のどこにも現れないので、β が何であっても $\alpha=(1-k)\beta$ と選べば 1 つ目の平方を 0 にできる。したがって問題は $25(k\beta+1)^2$ をどこまで小さくできるかであり、ここで 2 つの場合に分かれる。

? 考えてみよう $k=0$ のとき何が変わるか？

$k\neq 0$ ならば $\beta=-1/k$ ととることができ、このとき $k\beta+1=0$ となる。$k=0$ ならば、β が何であっても項 $25(k\beta+1)^2$ は 25 のままである。

$k\neq 0$ の場合。各平方は非負であるから $D^2\geq 25$ であり、等号は $\beta=-1/k$、$\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$ のとき成り立つ。最短距離は

$$D_{\min}=5,$$

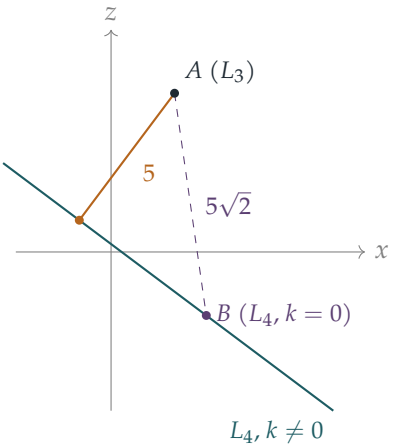
であり、これは（0 でない）k の値によらない。最も近い 2 点は $P=(2,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 5)$ と $Q=(-1,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 1)$ であり、$\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$ の長さは 5 である。$D_{\min}>0$ なので 2 直線は交わらず、また $k\neq 0$ のとき方向ベクトル $(0,1,0)$ と $(4k,1-k,-3k)$ は平行でない（後者の第 1 成分と第 3 成分がともに 0 になることはない）。よって 2 直線は**ねじれの位置**（skew）にあり、5 はそれらの共通垂線（common perpendicular）の長さである。共通垂線はただ 1 つに定まる。

$k=0$ の場合。このとき L_4 の方向ベクトルは $(0,1,0)$ となり、L_3 と同じである。すなわち 2 直線は**平行**（parallel）である。このとき $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$ であり、$\alpha=\beta$ であれば常に最小となるので、

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

である。最短距離を与える点の組は無数にある。一方の直線上の任意の点と、他方の直線上でその真向かいにある点（y 座標が等しい点）の組がそれである。これは単に、平行な 2 直線間の一定の距離にほかならない。

図形的な見方。どちらの直線も、y 軸の方向にまっすぐ見下ろす、すなわち xz 平面に射影（projection）すると最も見やすい。L_3 は y 軸に平行なので 1 点 $A=(2,5)$ に射影され、L_3 に垂直な方向の距離は射影によって変わらない。$k\neq 0$ のとき、L_4 は $(3,-2)$ を通り方向ベクトルが $(4,-3)$ の直線に射影され（$1-k$ の成分は消える）、A からその直線までの距離は $|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4|/5=5$ となって k によらない。$k=0$ のとき、L_4 は 1 点 $B=(3,-2)$ に射影され、距離は $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$ である。



以上より、答えは $k \neq 0$ のとき 5（ねじれの位置にある 2 直線で、最短の線分はただ 1 つであり、それは両方の直線に垂直である）、$k = 0$ のとき $5\sqrt{2}$（平行な 2 直線で、距離はどこでも同じ）である。

検算

小問 (i) では、$\lambda = 1$、$\mu = 3$ を代入すると距離 6 の 2 点が得られ、$\overrightarrow{PQ}$ は両方の直線に垂直である。(λ, μ) の格子上で数値的に探索しても、$D^2 = 36$ を下回る値は見つからなかった。小問 (ii) では、$k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$ に対して D^2 を数値的に最小化するといずれも 25 となり、$k = 0$ では 50 となった。$D_{\min}$ が $k = 0$ で 5 から $5\sqrt{2}$ へ跳ぶことに注意しよう。k が非常に小さいとき、最も近い 2 点は $\beta = -1/k$ 付近のはるか遠くにあるので、極限が連続である必要はないのである。

よくある間違い

- 2 つの平方が**同時に** 0 になりうるかの確認を忘れること。この問題では同時に 0 にできるが、それは仮定するのではなく、きちんと述べなければならない。
- $k = 0$ のときに k で割ってしまうこと。$\beta = -1/k$ という選び方は $k \neq 0$ のときにしか使えず、まさにそのために 2 つの場合が生じるのである。
- $k \neq 0$ のときの 2 直線を「交わる」と言ってしまうこと。2 直線は平行ではないが、$D_{\min} = 5 > 0$ なので、ねじれの位置にある。

STEP のその先へ

多変数での平方完成は、二次形式（quadratic form）の理論の出発点である。D^2 を平方和で表すことは対称行列（symmetric matrix）を対角化（diagonalisation）することであり、その最小値を求めることは最小二乗法（least squares）の問題である。最後に確かめた垂直性は最小二乗法の「正規方程式」（normal equations）にあたり、ねじれの位置にある 2 直線間の距離の一般公式 $|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ も同じ図形的考察から得られる。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、射影と最小二乗法を見事に解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。