解答例

STEP I 2007、第 6 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP I 2007、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの小問も累乗の差から始まり、そのどれもが $x-y$ を因数にもつ。この因数を約分すると（$d \neq 0$ であるから許される）、x と y の対称式（symmetric expression）が残る。これと $x-y=d$ を合わせると、x と y が決まる。整数解（integer solution）を得るには、さらに公式の値が整数になるように d を選べばよい。小問 (ii) では、それは平方根を有理数（rational）にすることを意味する。

解答

小問 (i)

左辺を因数分解（factorise）すると、

$$(x-y)(x+y)=(x-y)^3.$$

$x-y=d\neq 0$ であるから $x-y$ で割ることができ、$x+y=(x-y)^2=d^2$ を得る。これと $x-y=d$ の和と差をとると、

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

整数の組については、$x=\sqrt{m}$、$y=\sqrt{n}$ とおく。すると $x^2-y^2=m-n$ であり、求める条件はちょうど $x^2-y^2=(x-y)^3$ となる。$d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$ とおくと、$m>n$ よりこれは 0 でないので、

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

d が正の整数ならば、$d(d\pm1)$ は連続する整数の積であるから偶数である。よって $\sqrt{m}$ と $\sqrt{n}$ は整数であり、m と n も整数である。また $d>0$ より $m>n$ である。$n>100$、すなわち $\frac{1}{2}d(d-1)>10$ が必要である。$d=5$ では $\frac{1}{2}d(d-1)=10$ となり足りないので、$d=6$ をとる：

$$\sqrt{m}=21,\quad \sqrt{n}=15,\qquad m=441,\quad n=225.$$

確認：$m-n=216=6^3=(21-15)^3$。（$d=7$ で $m=784$、$n=441$ とするなど、他の答えも同様に正しい。）

小問 (ii)

再び因数分解する：$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$。$x-y=d\neq0$ で割ると、

$$x^2+xy+y^2=d^3.$$

また $(x-y)^2=d^2$、すなわち $x^2-2xy+y^2=d^2$ である。これを前の式から引くと $3xy=d^3-d^2$ となり、示すべき式が得られる。

次に $y=x-d$ を代入する：

$$3x(x-d)=d^3-d^2\quad\Longrightarrow\quad 3x^2-3dx-(d^3-d^2)=0.$$

解の公式（quadratic formula）より、

$$x=\frac{3d\pm\sqrt{9d^2+12(d^3-d^2)}}{6}=\frac{3d\pm\sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

ここで $\sqrt{3d^2(4d-1)}=|d|\sqrt{3(4d-1)}$ であり、$\pm$ がすでに両方の符号を含んでいるので、$|d|$ を d に置き換えてよい。2 を掛けると、

$$2x=d\pm\frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3}=d\pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

となり、これが求める結果である。

考えてみよう x と y が整数になるように d をどう選べばよいか？

$m=x$ と $n=y$ が整数ならば、$d=m-n$ は 0 でない整数である。x が有理数であるためには、$\sqrt{(4d-1)/3}$ が有理数でなければならない。これを k とおく。すると $k^2=(4d-1)/3$ は整数であり、整数の平方根が有理数になるのはその整数が平方数（perfect square）のときに限るので、k は整数である。したがって、次が必要である。

$$4d-1=3k^2\quad \text{ある整数} k\geq0.$$

左辺は奇数であるから、k は奇数である。すると $2x=d(1\pm k)$ は偶数となるので x は整数であり、$y=x-d$ も整数である。

- $k=1$ のとき $d=1$ であり、$x=1$、$y=0$ または $x=0$、$y=-1$ となる。どちらの組も二つの正の整数からなるものではない。
- $k=3$ のとき $d=7$ であり、$2x=7\pm21$ となる。正の符号をとると $x=14$、$y=7$ を得る。

よって $m=14$、$n=7$ が条件を満たす：

$$m^3-n^3=2744-343=2401=7^4=(m-n)^4.$$

順序が重要である。$m=7$、$n=14$ とすると、左辺は -2401 であるが右辺は $+2401$ である。

検算

- 小問 (i)：$21^2-15^2=441-225=216$ であり、$(21-15)^3=216$ である。
- 小問 (ii)：$d=7$ のとき、$3xy=3\cdot14\cdot7=294$ であり、$d^3-d^2=343-49=294$ である。
- $1\le m,n<200$ の範囲をコンピュータで探索すると、ちょうど $(14,7)$、$(57,38)$、$(148,111)$ が見つかる。これらは $k=3,5,7$（したがって $d=7,19,37$）から得られるもので、公式と一致する。この探索により、$(441,225)$ が小問 (i) で $n>100$ を満たす最小の解であることも確かめられる。

よくある間違い

- 約分には $x-y\neq0$ が必要であることを忘れる。問題が $d\neq0$ を仮定しているのはまさにこのためである。
- 小問 (i) で $d=5$ とすると $n=100$ となり、厳密な不等式 $n>100$ を満たさない。
- 断りなく $\sqrt{d^2}=d$ と書く。これは $|d|$ に等しく、絶対値（modulus）を外せるのは $\pm$ があるおかげである。

STEP のその先へ

小問 (ii) はディオファントス方程式（Diophantine equation）$m^3-n^3=(m-n)^4$ を完全に解いている。奇数 $k\ge3$ に対して $d=(3k^2+1)/4$ とおくと、解は $m=\frac{1}{2}d(k+1)$、$n=\frac{1}{2}d(k-1)$ である。平方根が有理数であることを要求するのは、このような方程式をはるかに単純な条件 $4d-1=3k^2$ に帰着させる標準的な方法である。このような

方程式や、その背後にある二次形式（quadratic forms）の整数論は、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。