解答例

STEP I 2007、第 5 問

純粋数学 ・ 多面体の幾何

> **STEP I 2007、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q5

鍵となる考え方

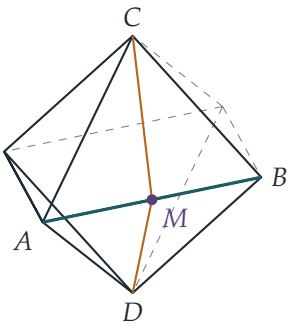
正八面体（regular octahedron）は座標の中にきわめてすっきりと収まる。その 6 個の頂点として、各座標軸の正の向きと負の向きにそれぞれ 1 単位進んだ点をとればよい。このモデルを使えば、どちらの小問も単なるベクトルの計算になる。2 つの面のなす角は、それらの共通の辺に垂直な平面の中で測るものなので、辺の中点（midpoint）から各面を横切って向かい側の頂点へ引いた 2 本の線分を用いる。面の中心は 3 つの頂点の単純な平均である。

解答

どの正八面体も他の正八面体を拡大・縮小したものであり、角の大きさも体積の比も拡大・縮小によって変わらない。したがって、頂点が

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

である正八面体で考えてよい。これらのうち互いに反対側にない 2 点の距離はどれも $\sqrt{2}$ であり、これで 12 本の辺が得られる。面は各軸上に 1 つずつ頂点をもつ 8 個の三角形であり、符号の選び方 1 通りごとに 1 つずつある。どの面も 1 辺 $\sqrt{2}$ の正三角形なので、これは確かに正八面体である。



小問 (i)

辺を共有する2つの面をとる。対称性によりどの辺も同じように見えるので、1組調べれば十分である。$A=(1,0,0)$、$B=(0,1,0)$、$C=(0,0,1)$、$D=(0,0,-1)$ とおくと、面 ABC と面 ABD は AB に沿って交わる。AB の中点を $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ とする。

考えてみよう 1本の直線に沿って交わる2つの平面のなす角は、どのように測ればよいか。

共通の直線上に1点をとり、それぞれの平面の中で、その点を通り共通の直線に垂直な直線を引く。この2直線のなす角が、2つの面のなす角である。各面は正三角形なので、三角形 ABC の中線（median）MC は AB に垂直であり、三角形 ABD の中線 MD も同様である。よって、求める角は $\angle CMD$ である。

さて、

$$\overrightarrow{MC}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right),\qquad \overrightarrow{MD}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

であり、どちらも当然 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ に垂直である。どちらも長さの2乗は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$ であり、

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

となる。したがって

$$\cos\angle CMD=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3},$$

であり、面のなす角は題意のとおり $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$、すなわち約 109.5° である。余弦が負なので、この角は鈍角（obtuse）である。つまり正八面体は、辺のところで立方体ほど尖っていない。

座標を使わなければ、同じ計算は三角形 CMD における余弦定理（cosine rule）になる。辺の長さを a とすると、中線は $MC=MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、C と D は互いに反対側の頂点である。4点 A、C、$(-1,0,0)$、D は1辺 a の正方形をなすので、$CD=\sqrt{2}\,a$

である。すると

$$2a^2 = \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{4}a^2 - 2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD \quad\Longrightarrow\quad \cos\angle CMD = -\tfrac{1}{3}.$$

小問 (ii)

面の中心は、その 3 つの頂点の平均である。各面は頂点を $(\pm1,0,0)$ から 1 つ、$(0,\pm1,0)$ から 1 つ、$(0,0,\pm1)$ から 1 つもつので、その中心は

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

であり、符号の 8 通りの選び方から 8 個の中心が得られる。これらはちょうど 1 辺 $\frac{2}{3}$ の立方体の頂点なので、

$$V_{\text{立方体}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

である。正八面体は、頂点 $(\pm1,0,0)$、$(0,\pm1,0)$ をもつ正方形に沿って 2 つの正四角錐（square-based pyramid）を貼り合わせたものである。この正方形の対角線の長さは 2 なので、面積は $\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$ であり、各四角錐の高さは 1 である。したがって

$$V_{\text{八面体}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times2\times1 = \tfrac{4}{3}.$$

となる。比は

$$\frac{V_{\text{八面体}}}{V_{\text{立方体}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

であるから、正八面体と立方体の体積の比は 9 : 2 である。

検算

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$ である。座標モデルの 12 本の辺すべてについて中点を用いた計算を数値的に繰り返すと、毎回 $\cos = -\frac{1}{3}$ となる。
- 正八面体は $|x|+|y|+|z|\le 1$ である。$[-1,1]^3$ 内の 10^6 個の無作為な点を用いたモンテカルロ法（Monte Carlo method）による体積の推定値は 1.330 であり、厳密な値 $\frac{4}{3}$ と比べて妥当である。
- 立方体は正八面体の内部にある（各中心は $|x|+|y|+|z|=1$ を満たす）ので、比は 1 より大きくなければならない。実際 $\frac{9}{2}$ はそうなっている。

よくある間違い

- 外向きの法線（normal）$(1,1,1)$ と $(1,1,-1)$ のなす角をとってしまい、$\arccos\frac{1}{3}$ を得る。面そのもののなす角は、その補角（supplement）である。

- 2 本の辺 CA と DA のように、共通の辺に垂直でない直線に沿って角を測ってしまう。その角はここでは 90° であり、面のなす角ではない。
- 立方体の 1 辺を、向かい合う 2 つの面の中心間の距離だと考えてしまう。その距離 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ は立方体の空間対角線（space diagonal）である。

STEP のその先へ

立方体と正八面体は**双対**（dual）な多面体（polyhedra）である。どちらについても面の中心を結ぶともう一方が得られ、面と頂点の役割が入れ替わる。双対性は、2 つの立体の対称性群（symmetry group）が同じ位数（order）48 の群であることを示す最初の手がかりであり、これは群論の最初の講義で出会うことになる。プラトンの立体（Platonic solids）の対称性群については、Armstrong の *Groups and Symmetry*（『群と対称性』）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。