解答例

STEP I 2007、第 4 問

純粋数学 • 2 次方程式の共通解

> **STEP I 2007、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q4

鍵となる考え方

前半は $x^3+y^3+z^3-3xyz$ のよく知られた因数分解（factorisation）であり、$x+b+c$ が因数であることさえわかれば、2 次式の部分は係数比較（matching coefficients）によって求まる。後半では、共通の解をもつ 2 つの 2 次方程式を扱う。定石は**消去**（eliminate）である。すなわち、2 つの方程式を組み合わせて k のある累乗の項を打ち消すのである。これを 2 通りの方法で行うと k と k^2 がそれぞれ比として表され、$k^2=(k)^2$ から係数だけの間の関係式が得られる。その関係式は、実は前半で $x=a$ としたものになっている。

解答

因数分解

$P(x)=x^3-3xbc+b^3+c^3$ に $x=-(b+c)$ を代入すると

$$\begin{aligned}P(-b-c)&=-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3\\&=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0,\end{aligned}$$

となるので、因数定理（factor theorem）により $x+b+c$ は因数である。係数を比較すると（P の x^2 の項は 0 であり、定数項は b^3+c^3 である）

$$x^3-3xbc+b^3+c^3=(x+b+c)\,\mathrm{Q}(x),\qquad \mathrm{Q}(x)=x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx.$$

を得る。右辺を展開すれば確かめられる。x^2 の項は $x^2(b+c)-x^2(b+c)=0$、x の項はまとめると $-3bcx$、定数項は b^3+c^3 となる。

平方の和については、$2\mathrm{Q}(x)$ において x^2、b^2、c^2 はそれぞれ 2 回ずつ現れ、交差項はそれぞれ $-2xb$ などの形で現れるので

$$2\mathrm{Q}(x) = (x-b)^2 + (b-c)^2 + (c-x)^2.$$

である。

共通解

k は両方の方程式の解であるから

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

k^2 を消去するために $b \times (1) - a \times (2)$ をつくると

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{よって} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

今度は k の項を消去するために $c \times (1) - b \times (2)$ をつくると

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{よって} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

これが k^2 を含む同様の式である。

ここで $k^2 = k \cdot k$ を用いる。$ac \neq b^2$ であるから $ac - b^2$ で割ることができ、$k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$ を得る。したがって

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

となる（両辺に $ac - b^2$ を掛けた）。これが求める結果である。

両辺を展開すると

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{よって} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

$a \neq 0$ であるから $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$ となり、示すべきことが得られた。

考えてみよう $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$ は以前どこで見ただろうか？

これは前半で $x = a$ としたものである。よって

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

ゆえに $a + b + c = 0$ または $\mathrm{Q}(a) = 0$ である。

$\mathrm{Q}(a)=0$ **の場合**。a、b、c は実数であるから 3 つの平方はいずれも 0 以上であり、その和が 0 となるのはそれぞれが 0 のときに限る。よって $a=b=c$ であり、2 つの方程式はどちらも $a(y^2+y+1)=0$ となる。すなわち、2 つの方程式は一致する。

$a+b+c=0$ **の場合**。k の式に $c=-a-b$ を代入すると

$$bc-a^2=-ab-b^2-a^2, \qquad ac-b^2=-a^2-ab-b^2,$$

となるので $bc-a^2=ac-b^2$ であり、これは 0 でないから $k=1$ である。（実際、$y=1$ は両方の方程式を満たす。このときどちらの方程式も $a+b+c=0$ となるからである。）

以上より、$k=1$ であるか、または 2 つの方程式が一致するかのいずれかであり、これで問題は解決した。

なお、方程式が一致する場合には $a=b=c$ から $ac=b^2$ となるが、これは仮定によって除外されている。したがって、与えられた条件のもとでは、共通解は実は常に $k=1$ である。「一致する」という選択肢は条件 $ac\neq b^2$ を外したときに起こる場合であり、そのときの共通解は 1 の虚数立方根（complex cube roots of unity）である。

検算

$a=1$、$b=2$、$c=-3$ とすると $a+b+c=0$ である。方程式は $y^2+2y-3=(y-1)(y+3)=0$ と $2y^2-3y+1=(2y-1)(y-1)=0$ であり、共通解 $k=1$ をもつ。このとき $ac-b^2=-7$、$bc-a^2=-7$、$ab-c^2=-7$ であるから、$(ac-b^2)k=bc-a^2$、$(ac-b^2)k^2=ab-c^2$、$(-7)(-7)=(-7)^2$ はすべて成り立ち、また $a^3-3abc+b^3+c^3=1+18+8-27=0$ である。さらに、前半の 2 つの恒等式（identity）と、展開式 $(ac-b^2)(ab-c^2)-(bc-a^2)^2=-a(a^3-3abc+b^3+c^3)$ についても、ランダムに選んだ 1000 組の 3 つ組で厳密な算術により検証した。

よくある間違い

- 定数項を消去する（$a\times(1)-c\times(2)$）と $k\big((a^2-bc)k+ab-c^2\big)=0$ となるが、これを役立てるにはさらに $k\neq 0$ が必要になる。$c\times(1)-b\times(2)$ という組み合わせならこの問題を避けられる。
- $ac-b^2$ が 0 でないことが問題文で保証されていると述べずに、$ac-b^2$ で割ってしまう。
- a、b、c が実数であることを使わずに $\mathrm{Q}(a)=0$ から $a=b=c$ を結論してしまう。平方和の議論は複素数に対しては成り立たない。

STEP のその先へ

2 つの多項式が共通解をもつための条件は、一般に**終結式**（resultant）によって与えられる。これは係数からつくられる行列式である。関係式 $(ac-b^2)(ab-c^2)=(bc-a^2)^2$ は、まさにこの 2 つの 2 次式の終結式を 0 とおいたものである。また、式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ は巡回行列（circulant matrix）の行列式でもあり、ω を 1 の虚数立方根として $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$ と完全に因数分解される。多項式とその根についてさらに知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。