解答例

STEP I 2007、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の積分

> **STEP I 2007、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

鍵となる考え方

$\cos^4\theta$ も $\sin^4\theta$ も、それ単独では積分しにくい。しかし、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて 2θ の関数にまとめてしまえば、それらの**差**と**和**はどちらも容易に積分できる。和と差をそれぞれ積分すると、求めたい 2 つの積分についての簡単な連立一次方程式が得られる。同じ工夫を次数を 1 つ上げて用いれば、6 乗の場合も扱える。

解答

恒等式

平方の差を因数分解すると、

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos 2\theta \cdot 1 = \cos 2\theta.$$

和については平方完成（completing the square）を行う：

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

ここで $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いた。以上で 2 つの恒等式（identity）が証明された。

4 乗の場合

$C_4 = \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$、$S_4 = \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$ とおく。1 つ目の恒等式を積分すると、

$$C_4 - S_4 = \int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

2 つ目の恒等式については $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta$ が必要である。$\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta)$ を用いると、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \, \mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

となる。$\sin 2\pi = 0$ だからである。したがって

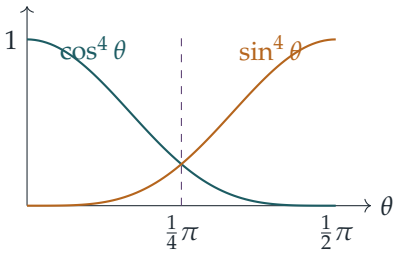
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

2 つの式を足したり引いたりすると、

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

考えてみよう 計算をせずに $C_4 = S_4$ がわかっただろうか。

わかる。置換（substitution）$\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$ により $\cos\theta$ は $\sin\phi$ に変わり、積分区間の端 0 と $\frac{1}{2}\pi$ が入れ替わるので、すべての n について $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi$ が成り立つ。$\cos^4\theta$ と $\sin^4\theta$ のグラフは直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ に関して互いに鏡像になっているので、囲む面積は等しい：



つまり、1 つ目の恒等式が本当に必要なのは和の計算だけである。差の積分が 0 になるのは、対称性が姿を変えて現れたものにほかならない。

6 乗の場合

同じ方法を繰り返す。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおき、$c^2 + s^2 = 1$ を用いると：

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2 s^2 + s^4) = \cos 2\theta \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta \left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

ここで、すでに証明した恒等式と $c^2 s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ を用いた。和については $c^2 + s^2$ の 3 乗を用いる：

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2 s^2 (c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

2 つの積分を C_6、S_6 とおく。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$ であるから、

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

となり、これは対称性による議論からの予想とも一致する。また、再び $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ を用いると、

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

したがって

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

検算

- 指数が大きくなるにつれて答えは小さくなっている：$n=0$ のとき $\frac{1}{2}\pi$、$n=2$ のとき $\frac{1}{4}\pi$、続いて $\frac{3}{16}\pi$、$\frac{5}{32}\pi$ である。区間上で $0 \le \cos\theta \le 1$ であるから、こうならなければならない。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$、$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$ が得られ、$3\pi/16$ および $5\pi/32$ と一致する。サインの積分も同じ精度でこれらと一致する。
- 和の恒等式に $\theta = \frac{1}{4}\pi$ を代入すると $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{2}$ および $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1-\frac{3}{4}$ となり、どちらも正しい。

よくある間違い

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ からの類推で $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$ と書いてしまう：交差項 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$ が抜け落ちている。
- $\cos 2\theta$ や $\cos 4\theta$ を積分するとき、合成関数の微分法（chain rule）から生じる係数 $\frac{1}{2}$ を忘れる。ここでは $\cos 2\theta$ については問題にならない（どのみち積分は 0 である）が、$\sin^2 2\theta$ については問題になる。

STEP のその先へ

これらはウォリス（Wallis）積分 $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$ の特別な場合であり、この積分は漸化式（reduction formula）$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を満たす（部分積分（integration by parts）を行えばよい）。$I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ および $I_6 = \frac{5}{6}I_4$ が上の答えを再現することを確かめてみるとよい。I_{2n} と I_{2n+1} を比較すると、π についての有名なウォリスの無限積（infinite

product）が導かれる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）には漸化式に関する STEP 形式の演習がさらに収められており、Bartle and Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では極限に関する議論が厳密に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。