解答例

STEP I 2007、第 2 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の恒等式

> **STEP I 2007、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q2

鍵となる考え方

逆正接（inverse tangent）どうしの等式は、両辺の正接をとって $\tan(A+B)$ の加法定理（addition formula）を用いれば、ただちに普通の分数どうしの等式になる。その代わり、tan は周期 π で同じ値を繰り返すので、$\tan(A+B)=1$ からわかるのは $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$ ということだけである。k を決めるには、角の大きさについて一言述べる必要がある。その後は、各小問は小さな整数論（number theory）の問題になる。因数分解するか、整除性（divisibility）による議論を用いればよい。

解答

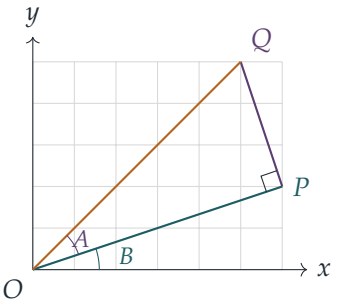
小問 (i)

$\tan A=\frac{1}{2}$、$\tan B=\frac{1}{3}$ であるから、

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

ここで A と B は鋭角なので $0<A+B<\pi$ であり、$(0,\pi)$ に含まれる角で正接が 1 となるものは $\frac{1}{4}\pi$ だけである。したがって、求めるとおり $A+B=\frac{1}{4}\pi$ である。

下の図は、同じ事実を方眼紙の上で示したものである。$O=(0,0)$、$P=(6,2)$、$Q=(5,5)$ とすると、直線 OP は x 軸と角 $\arctan\frac{1}{3}$ をなす。$PQ=(-1,3)$ は $OP=(6,2)$ に垂直で長さがその半分なので、角 POQ は $\arctan\frac{1}{2}$ である。そして Q は直線 $y=x$ 上、すなわち $\frac{1}{4}\pi$ の位置にある。



小問 (i)：整数 p と q

まず、加法定理でゼロ除算が起こる $pq=1$ の場合を除外する。このとき $p=q=1$ または $p=q=-1$ であり、左辺はそれぞれ $\frac{1}{2}\pi$、$-\frac{1}{2}\pi$ となって、どちらも $\frac{1}{4}\pi$ ではない。よって $pq\neq 1$ であり、与えられた等式の両辺の正接をとると、

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{pq}}=1.$$

分子と分母に pq を掛けると $\dfrac{p+q}{pq-1}=1$ となるので、

$$p+q=pq-1 \quad\Longrightarrow\quad pq-p-q+1=2 \quad\Longrightarrow\quad (p-1)(q-1)=2,$$

となり、これが求める結果である。

$p-1$ と $q-1$ は積が 2 となる整数であるから、組 $(p-1,q-1)$ は

$$(1,2),\quad (2,1),\quad (-1,-2),\quad (-2,-1),$$

のいずれかであり、$(p,q)=(2,3)$、$(3,2)$、$(0,-1)$、$(-1,0)$ を得る。p と q は 0 でないので、後の二つは除外される。よって $\{p,q\}=\{2,3\}$ であり、小問 (i) の前半により、どちらの順序でも実際に等式を満たす。

? **考えてみよう** ここで示したのは、解が $(p-1)(q-1)=2$ を満たさなければならないということだけである。なぜ後から候補を確かめる必要があるのだろうか？

正接をとると情報が失われる。$(p-1)(q-1)=2$ は $\tan(\arctan\frac{1}{p}+\arctan\frac{1}{q})=1$ と同値であり、これは和が $-\frac{3}{4}\pi$ のような場合も許してしまう。今回の候補の組は、0 を含む（したがって $\frac{1}{p}$ が意味をもたない）か、2 と 3 であるかのどちらかであり、後者が成り立つことはすでにわかっている。

小問 (ii)

$\theta = \arctan\frac{1}{r}$、$\phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$ とおく。与えられた等式の正接をとると、

$$\frac{\frac{1}{r}+\frac{s}{s+t}}{1-\frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

分母は 0 でない。実際、$r \geq 1$ かつ $t \geq 1$ より $r(s+t) > s$ である。分子と分母に $r(s+t)$ を掛けると、

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

考えてみよう s と t の最大公約数に関する条件は、どこで効いてくるのだろうか？

等式 $t(r-1) = 2s$ は、t が $2s$ を割り切ることを意味している。$\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ であるから、t は s と共通の素因数をもたない。したがって t の素因数はすべて 2 に由来しなければならず、t は 2 を割り切る。t は正の整数なので、可能な値は

$$t = 1 \quad \text{または} \quad t = 2.$$

だけである。

- $t = 1$ のとき：$r - 1 = 2s$ より $r = 2s + 1$。
- $t = 2$ のとき：$2(r-1) = 2s$ より $r = s + 1$。（$\mathrm{hcf}(s,2) = 1$ であるから、このとき s は奇数でなければならない。）

どちらの場合も実際に起こる。実際、$0 < \frac{1}{r} \leq 1$ かつ $0 < \frac{s}{s+t} < 1$ であるから、θ と ϕ はともに $(0, \frac{1}{4}\pi]$ に含まれ、$0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$ である。上の計算を逆にたどれば、$t(r-1) = 2s$ から $\tan(\theta+\phi) = 1$ が得られ、したがってちょうど $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$ となる。たとえば、$t = 1$, $s = 1$ とすると $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$ が、$t = 2$, $s = 1$ とすると $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ が得られる。これは小問 (i) の恒等式を、順序を入れ替えて二通りに表したものである。

検算

- 電卓で計算すると、$\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$。
- $|p|, |q| \leq 200$ を満たす 0 でないすべての p, q についてコンピュータで探索すると、見つかるのは $(2,3)$ と $(3,2)$ だけである。

- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ を満たす $r < 400$、$s,t < 150$ について探索すると、見つかるのは $t = 1$, $r = 2s+1$ と $t = 2$, $r = s+1$ だけである。たとえば、$\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$（$s = 7$, $t = 2$）が計算機の精度の範囲で成り立つ。

よくある間違い

- $A + B$ が $\frac{5}{4}\pi$ になり得ない理由を述べずに、$\tan(A+B) = 1$ から $A + B = \frac{1}{4}\pi$ と結論してしまう。
- 2 の負の因数分解 $(-1)(-2)$ と $(-2)(-1)$ を忘れる。あるいは、それらが 0 を与えるので除外しなければならないことを忘れる。
- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$ に言及せずに「t は $2s$ を割り切るから、t は 2 を割り切る」と述べてしまう。まさにここでこの仮定が必要になるのである。

STEP のその先へ

tan の加法定理は、実は複素数（complex number）の掛け算そのものである。$\arctan\frac{1}{p}$ は $p + \mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、小問 (i) は $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5 + 5\mathrm{i}$ の偏角が $\frac{1}{4}\pi$ であるという主張にほかならない。かつて π を数百桁まで計算するのに使われたマチン（Machin）の公式 $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi$ のような恒等式は、まさにこのようにガウス整数（Gaussian integer）を因数分解することから得られる。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は複素数の掛け算の幾何を見事に展開しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）は小問 (ii) で用いた整除性の議論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。