解答例

# STEP I 2007、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 2007、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q12

## 鍵となる考え方

2 個目の菓子については、袋の中身がどうなっているかがわからない。それは最初に何が起きたかに依存するからである。そこで条件付け（conditioning）を行う。すなわち、2 回目の取り出しより前に起きたことすべてに応じて場合分けし、各場合に赤が出る確率を求め、全確率の公式（law of total probability）を用いて足し合わせる。小問 (ii) には便利な近道がある。無作為に選ばれた菓子を 1 個受け取ったばかりの袋に入っている赤い菓子の個数の期待値（expected value）は簡単に書き下せるので、移された菓子の色による場合分けを何度も繰り返す必要はない。

## 解答

### 小問 (i)

1 個目の菓子が赤であるという事象（event）を $R_1$、2 個目の菓子が赤であるという事象を $R_2$ とする。どの菓子も 1 個目に取り出される確率は等しいので、

$$\mathrm{P}(R_1) = \frac{a}{N}.$$

$R_2$ については、1 個目の菓子の色で条件付ける。1 個目が赤ならば、残りは $N-1$ 個でそのうち $a-1$ 個が赤である。1 個目が赤でなければ、残りは $N-1$ 個でそのうち $a$ 個が赤である。（ここで $N \geq 2$ により 2 個目の菓子が存在することが保証される。）全

確率の公式により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_2) &= \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1) + \mathrm{P}(R_1')\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1') \\ &= \frac{a}{N}\cdot\frac{a-1}{N-1} + \frac{N-a}{N}\cdot\frac{a}{N-1} \\ &= \frac{a[(a-1)+(N-a)]}{N(N-1)} = \frac{a(N-1)}{N(N-1)} = \frac{a}{N}.\end{aligned}$$

よって $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)$ であり、示すべきことが示された。（同じことは対称性（symmetry）からもわかる。相異なる 2 個の菓子の順序対はどれも等しい確率で現れるので、2 個目の菓子が特定の菓子である確率は、1 個目がその菓子である確率と同じである。）

### 小問 (ii)

ここでの「1 個目の菓子」は 1 回目の硬貨投げの後に移される菓子であり、「2 個目の菓子」は 2 回目の硬貨投げの後に選ばれる菓子である。これらが赤であるという事象をそれぞれ $R_1$、$R_2$ とする。2 回の硬貨投げは互いに独立（independent）であり、またどちらもどの菓子が選ばれるかとは独立である。

**1 個目の菓子。** 1 回目の硬貨投げで条件付けると、

$$\mathrm{P}(R_1) = p\cdot\frac{a}{N} + q\cdot\frac{b}{N} = \frac{pa+qb}{N}.$$

**2 個目の菓子。** 2 回の硬貨投げの結果には 4 つの場合がある。

**表、表。** 袋 1 から菓子を 1 個取り、続いて袋 1 からもう 1 個取る。これはまさに小問 (i) の状況を袋 1（菓子 $N$ 個、うち赤 $a$ 個）に当てはめたものなので、2 個目の菓子が赤である確率は $a/N$ である。

**表、裏。** 菓子が 1 個、袋 1 から袋 2 へ移り、袋 2 の菓子は $N+1$ 個になる。その後、袋 2 から取り出す。袋 2 の赤い菓子は確率 $a/N$ で $b+1$ 個、確率 $1-a/N$ で $b$ 個なので、

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{HT}) = \frac{a}{N}\cdot\frac{b+1}{N+1} + \left(1-\frac{a}{N}\right)\frac{b}{N+1} = \frac{b+\frac{a}{N}}{N+1} = \frac{Nb+a}{N(N+1)}.$$

**考えてみよう** 2 行目はなぜこれほどきれいにまとまるのか。

分子は、移し替えの後に袋 2 に入っている赤い菓子の個数の期待値である。すなわち、もともと入っていた $b$ 個に、入ってきた菓子が赤である確率 $a/N$ を加えたものである。この場合、袋 2 の大きさは $N+1$ に固定されているので、赤を取り出す確率はその期待値を $N+1$ で割ったものになる。

**裏、表。**袋を入れ替えて同じ議論をすると、袋 1 には $N+1$ 個の菓子があり、赤い菓子の個数の期待値は $a+b/N$ である。よって

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{TH}) = \frac{Na+b}{N(N+1)}.$$

**裏、裏。**小問 (i) を袋 2 に当てはめると、確率は $b/N$ である。

ここで 4 つの場合を、それぞれの確率 $p^2$、$pq$、$qp$、$q^2$ を用いて合わせると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_2) &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(Nb+a)+(Na+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(N+1)(a+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= \frac{p^2a + pqa + pqb + q^2b}{N}\\ &= \frac{pa(p+q)+qb(p+q)}{N} = \frac{pa+qb}{N},\end{aligned}$$

となる。最後の段階で $p+q=1$ を用いた。これは $\mathrm{P}(R_1)$ に等しく、示すべきことが示された。

## 検算

- $p=1$ のとき、すべては袋 1 の中で起こり、両方の菓子に対する答え $a/N$ はまさに小問 (i) である。$p=0$ のときは袋 2 に対する小問 (i) が得られる。
- $a=b=0$ のとき赤い菓子はなく、両方の確率は 0 である。$a=b=N$ のときすべての菓子が赤で、両方の確率は 1 である。
- $N=5$、$a=2$、$b=4$、$p=0.3$ のとき、公式は $(0.6+2.8)/5=0.68$ を与える。過程全体を 200 000 回シミュレーションしたところ、1 個目の菓子については 0.679、2 個目については 0.681 が得られた。また、小さな $N$、$a$、$b$ すべてについて厳密に数え上げた結果も一致する。

## よくある間違い

- 移し替えの後、受け取った袋の菓子は $N$ 個ではなく $N+1$ 個であり、渡した袋は $N-1$ 個であることを忘れる。
- 表表および裏裏の場合に、2 回目の取り出しを 1 回目と独立であるとみなす。実際には独立ではないが、小問 (i) により答えは変わらないことがわかっているので、計算をやり直すのではなく小問 (i) を使えばよい。

## STEP のその先へ

どちらの小問も、ある深い考え方の例になっている。壺から取り出したものを見ずにいれば、壺についての知識は変わらないので、次の取り出しも同じ分布をもつ。形式的に言えば、取り出しの列は**交換可能**（*exchangeable*）であり、小問 (ii) における量 $p \times$ (袋 1 の赤の割合) $+ q \times$ (袋 2 の赤の割合)、すなわち次に取り出す菓子が赤である確率は**マルチンゲール**（*martingale*）である。マルチンゲールとは、将来の値の期待値が現在の値に等しい量のことである。マルチンゲールは、賭けから金融に至るまで、現代確率論の中心をなしている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）やこれらの考え方に出会うのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。