解答例

STEP I 2007、第 11 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 2007、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

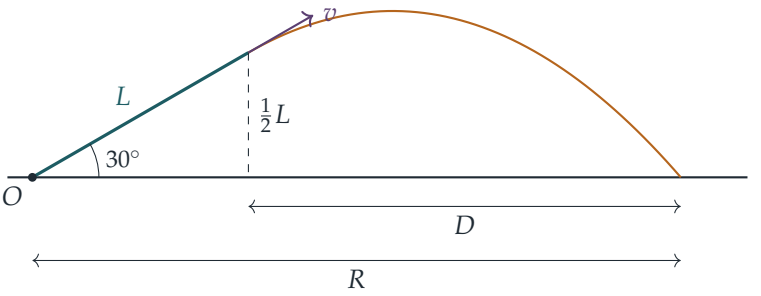
step.maths.org/questions/07-s1-q11

鍵となる考え方

運動を二つの段階に分ける。滑らかな管の中では、管に沿った方向にはたらく力は重力の成分だけなので、エネルギー（energy）の関係（あるいは等加速度運動の公式（constant-acceleration formulae））から出口での速さが求まる。その後は通常の放物運動（projectile motion）であり、到達地点の高さより $\frac{1}{2}L$ だけ高い点から 30° の角度で打ち出される。飛行時間を消去すれば D についての 2 次方程式が得られ、これを**陰関数微分**（implicit differentiation）すれば、D を解かずに $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ が求まる。

解答

粒子を質点（point mass）とみなし、管は滑らか（smooth）である（したがって垂直抗力（normal reaction）は仕事をせず、管に沿った成分をもたない）とし、空気抵抗（air resistance）は無視する。



管の中

管に沿った方向に力を分解すると、その方向の力の成分は斜面下向きの $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$ だけなので、減速度は $\frac{1}{2}g$ である。距離 L を進む間に

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

となる。ここで v は出口での速さである。(そもそも粒子が管から出るためには $u^2 > gL$ が必要である。) 管の上端は下端より高さ $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$ だけ高く、下端から水平距離 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ の位置にある。

放物運動の段階

粒子は管に沿った向きに飛び出すので、その速度の水平成分は $\frac{\sqrt{3}}{2}v$、鉛直成分は上向きに $\frac{1}{2}v$ である。出口の点を原点にとると、時刻 t において

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

粒子が下端の高さに戻るのは $y = -\frac{1}{2}L$ となるときであり、その瞬間に $x = D$ である。第 1 式から $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$ であり、これを第 2 式に代入すると

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

両辺に $-6v^2$ を掛けると

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

となり、$v^2 = u^2 - gL$ を代入すると

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

これが求める方程式である。(二つの解の積は $-3Lv^2/(4g) < 0$ なので、D は正の解の方である。)

導関数

u を固定すると D は L に依存するので、方程式を L で微分する。両者を含む各項には積の微分法 (product rule) を用いる：

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

最後の 2 項はまとめると $-3(u^2 - 2gL)$ になる。$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$ を含む項をまとめると

$$\left(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\left(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\right),$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

となり、示された。

考えてみよう なぜ $-3L(u^2 - gL)$ の項から二つの部分が生じるのか？

この項には L が 2 回現れるからである。$-3Lu^2 + 3gL^2$ を微分すると $-3u^2 + 6gL$ となり、これは $-3(u^2 - gL) + 3gL$ に等しい。括弧の中の L を忘れることが、答えの $2gL$ を見落とす最もありがちな原因である。

R の停留値

下端からの最終的な水平変位は、管の水平方向の長さに D を加えたものである：

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D, \qquad \text{so} \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

よって $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$ となるのは、ちょうど $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、すなわち（分母を払うと。分母が 0 でないことは後で確かめる）

$$2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\big) = 4\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL).$$

のときである。$3u^2$ の項は打ち消し合い、$6gL - 2\sqrt{3}\,gD = 3gL$ が残るので $2\sqrt{3}\,gD = 3gL$、すなわち

$$2D = L\sqrt{3}.$$

どの段階も逆にたどれるので、$2D = L\sqrt{3}$ のとき $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$ となり、示された。

R を求めるために、$D = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ を 2 次方程式に代入すると

$$4g \cdot \tfrac{3}{4}L^2 - 2\sqrt{3}(u^2 - gL) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}L - 3L(u^2 - gL) = 3gL^2 - 6L(u^2 - gL) = 0.$$

$L > 0$ なので $gL = 2(u^2 - gL)$ となり、$L = \dfrac{2u^2}{3g}$ である。（このとき $v^2 = u^2 - gL = \frac{1}{3}u^2 > 0$ なので粒子は確かに管から出ており、分母 $8gD - 2\sqrt{3}v^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}u^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}u^2 = 2\sqrt{3}\,u^2$ は 0 でない。）最後に

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D = \sqrt{3}\,L = \frac{2\sqrt{3}\,u^2}{3g} = \frac{2u^2}{\sqrt{3}\,g}.$$

検算

- $L = 0$ のとき、2 次方程式から $D = \sqrt{3}u^2/(2g)$ が得られる。これは 30° で打ち出したときのおなじみの到達距離 $u^2 \sin 60° / g$ である。

- $L = u^2/g$ のとき、粒子は $v = 0$ でちょうど上端に達するので $D = 0$ となり、再び $R = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2/g$ である。停留値 $2u^2/(\sqrt{3}g) \approx 1.155\,u^2/g$ はこれらの間の L でとられ、どちらの値よりも大きいので、最大値である。
- 数値的には、$u = g = 1$ として L を $[0, 1]$ の範囲で走査すると、$L \approx 0.6667$ で R の最大値 1.1547 が得られ、$2/\sqrt{3}$ および $L = \frac{2}{3}$ と一致する。また、運動を直接数値的に追跡しても D についての 2 次方程式が再現される。

よくある間違い

- 管の中での減速度を $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ ではなく g としてしまう。
- $y = -\frac{1}{2}L$ ではなく $y = 0$ とおいてしまう。粒子は打ち出された点より低い位置に着地するのである。
- 管そのものの水平方向の長さ $\frac{\sqrt{3}}{2}L$ を忘れて $R = D$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $F(D, L) = 0$ を解かずに微分することは陰関数微分であり、大学 1 年の解析学では陰関数定理（implicit function theorem）となる：$\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$ は $F_D \neq 0$ であるところではどこでも成り立ち、この条件はまさに先ほど確かめた分母の条件である。力学について次に進むには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。