解答例

STEP I 2007、第 10 問

力学 ・ 変位－時間グラフ

> **STEP I 2007、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q10

鍵となる考え方

変位–時間グラフ（displacement–time graph）の上では、騎手も軍も 1 本の直線（または 2 本の線分）で表され、「すれ違う」とは単に 2 本の直線が交わることにほかならない。そこで、サクソン軍からの変位を測ることにして各直線の方程式を書き下し、それらの交点を求める。問題文の不等式は、交わりが予想どおりの順序で起こるための条件そのものであり、最後の小問はその条件の一つが破れたときに何が起こるかを問うている。

解答

グラフの設定

軍と騎手を、一直線上を動く点としてモデル化する。s を（静止している）サクソン軍からノルマン軍の方向へ測った変位とし、両軍の距離が d となった時刻を時間の原点とする。すると次のようになる。

- サクソン軍：$s = 0$。
- ノルマン軍：$s = d - ut$。
- サクソンの騎手、往路：$s = xt$。$xt = d - ut$ となるときにノルマン軍に到達するので、それは時刻 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$、位置 $s = \dfrac{xd}{x+u}$ である。速さ x で引き返すので、

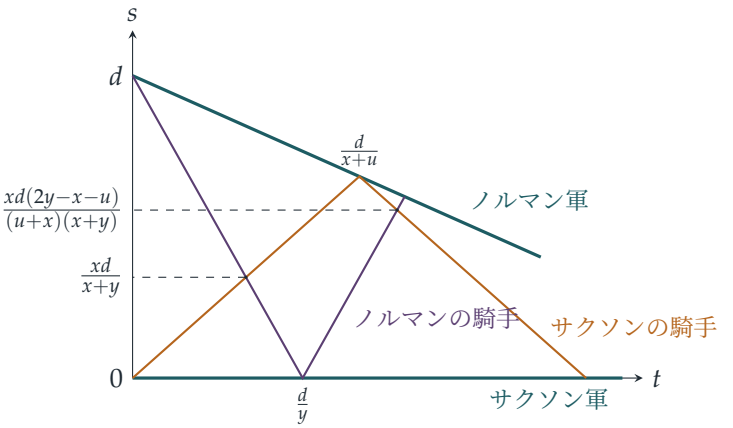
$$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

  となり、$t = \dfrac{2d}{x+u}$ に自軍へ帰り着く。

▶ ノルマンの騎手、往路：$s = d - yt$。時刻 $t_N = \dfrac{d}{y}$ にサクソン軍に到達し、速さ y で引き返すときの直線は

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

である。$y > u$ であるから、$yt - d = d - ut$ となるとき、すなわち $t = \dfrac{2d}{y+u}$ に、確かに自軍に追いつく。



（図は $u = 1$、$x = 2$、$y = 4$、$d = 1$ として描いてある。）

1 回目のすれ違い

両騎手とも往路にあるので、$s = xt$ と $s = d - yt$ の交点を求める。$(x+y)t = d$ より

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

$\frac{d}{x+y}$ は $\frac{d}{y}$ と $\frac{d}{x+u}$ のいずれよりも小さい（後者には $y > u$ を用いる）ので、これは確かにどちらの騎手も引き返す前である。

2 回目のすれ違い

今度は両騎手とも帰路にある。$s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$ と $s = yt - d$ の交点を求める。両辺に $xt + d$ を加えると

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{よって} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

このとき

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

となり、これが求める 2 つ目の距離である。

考えてみよう 時刻 t_2 に両騎手が本当に帰路にあることは、どうすればわかるだろうか。

ここで不等式が効いてくる。ノルマンの騎手が引き返しているのは $t_2 \geq \frac{d}{y}$ のときであり、

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2+xy+ux \iff u \leq 2y-x.$$

サクソンの騎手が引き返しているのは $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$ のときであり、

$$3x+u \geq x+y \iff u \geq y-2x.$$

したがって、条件 $y-2x < u < 2y-x$ はまさに t_2 が両方の折り返し時刻より後になるための条件である。同じ条件 $u < 2y-x$ によって $s > 0$ ともなるので、サクソンの騎手はまだ帰り着いていない。（問題文には書かれていない条件がもう一つある。ノルマンの騎手が先に自軍に帰り着いてしまってはならない。$t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$ を計算すると $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$ に帰着し、$2x-y+u > 0$ であるから、これは $x \geq u$、すなわちサクソンの騎手がノルマン軍以上の速さをもつことを意味する。これは当然意図されている前提であろう。そうでなければ、騎手が引き返した瞬間に軍に追い抜かれてしまう。）

場合 (i)：$u > 2y-x$

このとき $t_2 < \frac{d}{y}$ であり、サクソンの騎手の帰路の直線とノルマンの騎手の**往路**の直線が先に交わる。$y > u$ であるから、この場合には $x > y$、つまりサクソンの騎手のほうが速いことが必要である。サクソンの騎手はノルマン軍に到達して引き返し、両者がともにサクソン軍に向かっている間に、ノルマンの騎手に後ろから追いつく。（$s = \frac{2xd}{x+u} - xt$ と $s = d - yt$ の交点を求めると、その位置はサクソン軍から $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$ である。）サクソンの騎手は $\frac{2d}{x+u}$ に帰り着き、これはノルマンの騎手が $\frac{d}{y}$ に到着するより前であるから、2 人が 2 度目に正面からすれ違うことはない。ノルマンの騎手はただサクソン軍に到着するだけで、そこには相手がすでに戻っている。

場合 (ii)：$u < y-2x$

このとき $t_2 < \frac{d}{x+u}$ であり、ノルマンの騎手のほうがはるかに速い。ノルマンの騎手はサクソン軍に到達して引き返し、まだノルマン軍に向かって往路を進んでいるサクソンの騎手を追い越す。$s = yt - d$ と $s = xt$ の交点を求めると、これは時刻 $t = \frac{d}{y-x}$、サクソン軍から $\frac{xd}{y-x}$ の位置で起こる。その後ノルマンの騎手は $\frac{2d}{y+u}$ に帰り着き、これはサクソンの騎手が $\frac{d}{x+u}$ にノルマン軍に到達するより前である（$2(x+u) < y+u$ であるから）。したがって、両軍の間の野原でそれ以上すれ違うことはない。

検算

- $d = 1$、$u = 1$、$x = 2$、$y = 4$（図と同じ）とすると、公式からすれ違いの位置は $\frac{1}{3}$ と $\frac{5}{9}$ となる。時間刻み 10^{-5} で運動を数値的に追うと、交差は 0.3333 と 0.5556 で起こる。
- $y = x + u$ ならば 2 つの距離は等しく、どちらも $\frac{x}{x+y}d$ となる。これは確かめるのにちょうどよい特別な値である。
- $u \to 2y - x$ のとき 2 つ目の距離は 0 に近づく。2 回目のすれ違いはちょうどサクソン軍の位置で起こり、これが場合 (i) との境界である。

よくある間違い

- 騎手の帰路を $s = -xt$ や $s = yt$ と書いてしまい、時間の原点を折り返しの瞬間にずらすのを忘れる。
- サクソンの騎手の折り返し地点として、騎手が到着した瞬間のノルマン軍の位置ではなく、$t = 0$ における位置を用いてしまう。
- 最後の小問で、「2 人は出会わない」とだけ答える。どちらの場合も 2 人は 2 度目にすれ違うが、それは同じ向きに進みながらであり、一方が他方を追い越すのである。

STEP のその先へ

このようなグラフは**世界線**（world line）と呼ばれ、特殊相対性理論（special relativity）の基本的な道具である。そこでは、運動する観測者の間を往復する光の信号がまさにこの方法（レーダー法）で解析され、直線の傾きが相対速度を表す。ここでの計算、すなわち一方の速さに u を加え、他方から引くという操作は、ガリレイの相対速度（Galilean relative velocity）である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ガリレイ的な描像と相対論的な描像の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。