解答例

STEP I 2007、第 1 問

純粋数学 • 数字の並べ方の数え上げ

> **STEP I 2007、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

鍵となる考え方

バランス数（balanced number）を一つひとつ書き出そうとしてはいけない。そうではなく、2 つの数字の和に共通する値 s によって分類するのである。各 s について、前半の 2 桁と後半の 2 桁は互いに独立に選べるので、その和をもつバランス数の個数は 2 つの個数の積になる。すると、すべては s を 2 つの数字の和として表す方法の数を数えることに帰着する。これは正方形の格子の対角線上にある格子点（lattice points）を数えることと同じである。

解答

4 桁のバランス数を $abcd$ と書く。ここで各数字は $\{0,1,\ldots,k\}$ に属し、$a \geq 1$（先頭の数字は 0 にはなれない）であり、さらにある s（$0 \leq s \leq 2k$）について

$$a+b=c+d=s$$

が成り立つ。各 s に対して、

- $N(s)$ を、$c+d=s$ を満たす数字の順序対（ordered pair）(c,d) の個数とし、
- $M(s)$ を、$a \geq 1$ かつ $a+b=s$ を満たす数字の順序対 (a,b) の個数とする。

s を固定すれば、条件を満たす前半の組はどれも、条件を満たす後半の組のどれとでも組み合わせられる。したがって、数字の和が s であるバランス数の個数は $M(s)N(s)$ である。s の値が異なれば異なる数が得られるので、

$$\text{総数} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\,N(s).$$

組の個数を数える

$N(s)$。$0 \le s \le k$ ならば、c は $0, 1, \ldots, s$ のどれでもよく、$d = s - c$ は自動的に数字になる。よって $N(s) = s + 1$ である。$k < s \le 2k$ ならば、$d = s - c \le k$ より $c \ge s - k$ でなければならないので、c は $s - k$ から k までを動き、$N(s) = 2k + 1 - s$ となる。

$M(s)$。これも同じ数え方であるが、$a = 0$ となる組が存在すればそれを除く点だけが異なる。その組は $(0, s)$ であり、これが許されるのは $s \le k$ のときに限る。よって

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

特に $M(0) = 0$ である。すなわち数字の和が 0 のバランス数は存在しないが、$a \ge 1$ であるからこれは正しい。

> **考えてみよう** $a + b = c + d$ を満たす 4 文字の数字列をすべて数えて、それで終わりにしてはなぜいけないのだろうか。

0312 のような数字列は 4 桁の数ではないからである。条件 $a \ge 1$ は前半の組にしか影響せず、しかも和が小さいときにしか影響しない。まさにそのために、$M(s)$ と $N(s)$ は $s \le k$ のときに限って異なるのである。

小問 (i)

ここでは $k = 4$ であり、和は 0 から 8 までを動く。

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(s)$	0	1	2	3	4	4	3	2	1
$N(s)$	1	2	3	4	5	4	3	2	1
$M(s)N(s)$	0	2	6	12	20	16	9	4	1

最下行の和は $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$ である。よって、数字 0 から 4 を用いて作れる 4 桁のバランス数は 70 個であり、題意が示された。

小問 (ii)

次に、M と N の式を用いて、和を $s = k$ で分ける。

$$\text{総数} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

（$s = 0$ の項は 0 である。）2 つ目の和において $r = 2k + 1 - s$ とおく。s が $k + 1$ から $2k$ まで動くとき、r は k から 1 まで減少しながら動くので、2 つ目の和は $\sum_{r=1}^{k} r^2$ である。

したがって

$$\begin{aligned}\text{総数} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2+r)+\sum_{r=1}^{k}r^2 = 2\sum_{r=1}^{k}r^2+\sum_{r=1}^{k}r\\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1)+\tfrac{1}{2}k(k+1)\\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big)\\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5),\end{aligned}$$

となる。ここで、$\sum r^2$ について与えられた恒等式（$r=0$ の項は何も寄与しない）と $\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2}k(k+1)$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 公式に $k=4$ を代入すると $\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 21 = 70$ となり、小問 (i) と一致する。
- $k=1$ のとき公式は 3 を与える。直接調べると、0 と 1 だけを用いる 4 桁のバランス数は 1001、1010、1111 である。
- $a \geq 1$ を満たすすべての数字列 $abcd$ を総当たりで数えた結果は、k が 1 から 15 までのすべての場合に公式と一致する（たとえば 10 進数の数字すべてを用いる $k=9$ のときは 615）。

よくある間違い

- 先頭の数字に関する条件を忘れること。この場合は代わりに $\sum N(s)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$ が得られ、$k=4$ のときは 85 となってしまう。
- $s > k$ のときの組の個数を誤ること。両方の数字が k 以下に制限されるので、その個数は $s+1$ ではなく $2k+1-s$ である。
- 和を分けるとき、中央の和 $s=k$ を両方に数えてしまう、あるいはどちらにも数えないこと。

STEP のその先へ

個数 $N(s)$ は $(1+x+\cdots+x^k)^2$ における x^s の係数であり、バランス数の総数はこのような多項式の積の係数として表される。この**母関数**（generating function）の方法は $2n$ 桁のバランス数も扱うことができ、そのような場合には直接数える方法はすぐに手に負えなくなる。これは大学の組合せ論における中心的な道具である。この趣旨の数

え上げの問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。