解答例

STEP III 2006、第 9 問

力学 ・ エネルギー保存

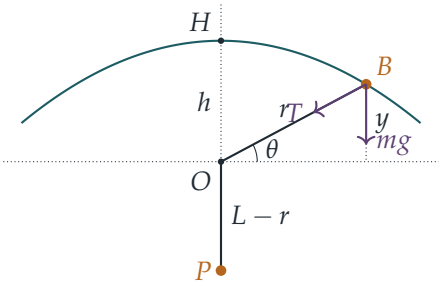
> **STEP III 2006、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q9

鍵となる考え方

糸の長さは一定なので、ビーズ（bead）が O から遠ざかった分だけ、質点 P は同じ量だけ上昇する。これにより二つの位置エネルギー（potential energy）が結びつき、その合計は $y + r$ のみに依存する。「あらゆる位置で釣り合い（equilibrium）にある」とは、位置エネルギーに特別な位置がないということであるから、位置エネルギーは針金に沿って一定でなければならない。一定であることがわかれば、エネルギー保存則（energy conservation）により運動エネルギー（kinetic energy）の総和は決して変化しない。あとはビーズの速さを極座標（polar coordinates）で書き表すだけである。

解答

モデル化。 P と B は質量 m の質点とする。糸は軽く伸び縮みせず、輪（ring）と針金は滑らかであるから、糸の張力（tension）は正味の仕事をせず、針金からの垂直抗力（normal reaction）も仕事をしない。O を原点とし、x を水平方向、y を鉛直上向きにとり、糸の長さを L とする。



針金の形

O から B までの糸の長さは r であるから、長さ OP は $L-r$ であり、P は O より距離 $L-r$ だけ下にある。O を通る水平面を位置エネルギーの基準にとると、位置エネルギーの総和は

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

である。この系の自由度（degree of freedom）は 1（針金上のビーズの位置）であり、釣り合いの位置は針金に沿った U の停留点（stationary point）である。あらゆる位置が釣り合いの位置であるならば、針金に沿ったいたるところで $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$ となる（s は弧長（arc length））。よって U は針金に沿って一定である。したがって $y+r$ は一定である。

H ではビーズは O の真上の高さ h にあるから、そこでは $y = h$ かつ $r = h$ であり、定数は $2h$ である。よって針金の方程式は

$$y + r = 2h,$$

となり、示すべきことが示された。（直交座標で表すと、$x^2 + y^2 = (2h-y)^2$ から $y = h - x^2/(4h)$ が得られる。これは図のように O を焦点（focus）とする放物線（parabola）である。釣り合いを直接確かめることもできる。P は釣り合っているので張力は mg であり、BO 方向の mg と下向きの mg の合力はこれら二方向のなす角を二等分する。これは放物線の反射の性質（reflection property）により、まさにその点における放物線の法線の方向である。）

θ の変化率

針金上では $y = 2h - r$ であるから、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

これを時間で微分すると、

$$\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2}.$$

$\theta = \arcsin(y/r)$ は $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に属するので $\cos\theta \geq 0$ であり、

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

ビーズが H を離れた後は $r > h$ である（$r = 2h - y$ であり、H 以外では $y < h$ だからである）。よって $\cos\theta \neq 0$ であり、割り算をしてよい。

$$\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot{r}}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

これが求める結果である。

P の速さ

考えてみよう なぜ運動エネルギーの総和は $\frac{1}{2}mV^2$ のまま保たれなければならないのか。

系に仕事をする力は、重力と（内力である）糸の張力だけである。張力は正味の仕事をしない。糸は伸び縮みせず輪は滑らかなので、張力が B にする仕事と P にする仕事は打ち消し合うからである。針金は滑らかなので、その抗力は仕事をしない。よって運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存される。ところが、いま示したように位置エネルギー U はこの針金に沿って**一定**であるから、運動エネルギーも一定である。

最初、ビーズは H にあり、そこで r は最小値 h をとる（y がそこで最大となるからである）。よって最初は $\dot{r}=0$ であり、速さが $|\dot{r}|$ である P は静止した状態から動き始める。したがって最初の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mV^2$ である。

O を中心とする極座標では、ビーズの速さの 2 乗は $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$ である。$\dot{\theta}$ についての結果を用いると、

$$r^2\dot{\theta}^2=\frac{h^2\dot{r}^2}{rh-h^2}=\frac{h\dot{r}^2}{r-h},\qquad \text{よって}\qquad v_B^2=\dot{r}^2\left(1+\frac{h}{r-h}\right)=\frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

運動エネルギーの保存から、$\frac{1}{2}m$ を約すと

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h}+\dot{r}^2=V^2\quad\Longrightarrow\quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h}=V^2.$$

$r>h$ であるから $r-h$ と $2r-h$ はともに正であり、P の速さは

$$|\dot{r}|=V\left(\frac{r-h}{2r-h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- H では $r=h$ であり、公式は 0 を与える。P は静止状態から動き始めるので正しい。
- $r\to\infty$ のとき、P の速さは $V/\sqrt{2}$ に近づく。遠方ではビーズはほぼ動径方向に動くので、B と P の速さはほぼ等しくなり、運動エネルギーを等分する。
- 数値的に、$h=1$、$V=2$ として、$y=1-\frac{1}{4}x^2$ に沿ったビーズの運動方程式を（RK4 で）数値的に解き進め、$\dot{\theta}$ と $\dot{r}$ の差分による値を公式と比較した。$r\approx 4.043$ において P の速さは 1.31064 であり、$2\sqrt{3.043/7.087}$ と有効数字 6 桁まで一致した。

よくある間違い

- P の位置エネルギーを $+mg(L-r)$ としてしまう。P は O の下にあるので、その高さは $-(L-r)$ である。
- P も動くことを忘れて、$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mV^2$ と書いてしまう。
- $\cos\theta$ が H でのみ 0 になることに触れずに、$\cos\theta$ で割ってしまう。

STEP のその先へ

系がいたるところで「中立」釣り合い（neutral equilibrium）となる曲線を求めることは、釣り合いの位置は位置エネルギーの停留点であるという原理の小さな一例である。この原理はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながっていく。そこでは、糸や針金のような拘束（constraint）は、うまい座標を選ぶことで初めから組み込まれる。ここでは一つの座標 r がその役割を果たし、エネルギー保存則が第一積分（first integral）となっている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方でエネルギーを用いる方法と極座標を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。