解答例

STEP III 2006、第 8 問

純粋数学 ・ 公理による微分

STEP III 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q8

鍵となる考え方

4 つの規則は、ふだん使っている微分（differentiation）の性質そのものである。すなわち線形性（linearity）と積の法則（product rule）、そして x を「微分すると」1 になるというただ一つの事実である。すべての多項式（polynomial）は数 1 と文字 x から掛け算と足し算によって組み立てられるので、$\triangle$ が 1 と x に何をするかがわかれば、それ以外のところで $\triangle$ に自由の余地は残らない。積の法則を $x \cdot x^n$ に適用するとべき乗についての帰納法（induction）が得られ、あとは線形性で仕上がる。

解答

以下では、「規則 (i)」から「規則 (iv)」は、与えられた順に並べた 4 つの定義規則を指す。

定数

まず定数多項式 1 を考える。$1 = 1 \cdot 1$ であるから、$f(x) = g(x) = 1$ として規則 (iv) を用いると

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\triangle 1.$$

両辺から $\triangle 1$ を引くと $\triangle 1 = 0$（零多項式）が得られる。

考えてみよう なぜ単に「導関数と同じように、定数の $\triangle$ は 0 である」と言ってはいけないのか？

$\triangle$ が導関数であることは、まだわかっていないからである。それこそが最後の小問で

証明を求められていることである。使ってよいのは4つの規則だけであり、そのどれも定数について直接には述べていない。うまい工夫は、1がそれ自身の2乗であることで、そのため積の法則により $\triangle 1$ はそれ自身の2倍に等しくならざるをえない。

次に $f(x) = \lambda$ を任意の定数とする。このとき $\lambda = \lambda \cdot 1$ であるから、規則 (iii) により

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

よって、次数0のすべての多項式に対して $\triangle f(x) = 0$ であり、示すべきことが示された。

2乗と3乗

$x^2 = x \cdot x$ と書いて規則 (iv)、続いて規則 (i) を用いると

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

$x^3 = x \cdot x^2$ と書いて規則 (iv)、続いていま求めた結果と規則 (i) を用いると

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

一般の多項式

ステップ1：x のべき乗。数学的帰納法により

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{任意の整数} n \geq 1$$

を証明する。$n = 1$ のとき、これは $\triangle x = 1$ を意味し、規則 (i) そのものである。ある $n = k \geq 1$ で成り立つと仮定する。$x^{k+1} = x \cdot x^k$ であるから、規則 (iv) により

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

ここで2行目では帰納法の仮定（induction hypothesis）と規則 (i) を用いた。よって $n = k+1$ でも成り立ち、帰納法によりすべての $n \geq 1$ で成り立つ。$n = 0$ のときは $x^0 = 1$ であり、$\triangle 1 = 0$ をすでに示したので、これは $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 1 = 0$ と一致する。したがって、すべての $n \geq 0$ に対して

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

ステップ2：多くの項の和。規則 (ii) は2つの多項式について述べたものであるが、任意の有限個に拡張できる。$\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$ ならば、2つの多項式 $f_1 + \cdots + f_m$ と f_{m+1} に規則 (ii) を適用して

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

を得る。よって m についての帰納法により、任意の個数の項について成り立つ。

ステップ 3：まとめる。 任意の多項式は、定数 a_k を用いて $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{規則 (ii)（ステップ 2 で拡張したもの）による} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{規則 (iii) による} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{ステップ 1 による（}k = 0 \text{ の項は 0）} \\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

最後の行は多項式の通常の導関数である。これはすべての多項式 $h(x)$ について成り立つので、$\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$ であり、示すべきことが示された。

検算

通常の微分が 4 つの規則をすべて満たすことは心強い。これにより、規則どうしは矛盾しておらず、$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ はまさに述べられた種類の演算であることがわかる。積の法則を公式と照らし合わせて確かめることもできる。$f = x^2$、$g = x^3$ とすると、規則 (iv) により $x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4$ となり、これは $\triangle x^5$ である。コンピュータ上で、規則だけを用いて（ステップ 1 からステップ 3 のように）$\triangle$ を構成し、次数 9 以下の 2000 個のランダムな多項式について導関数と厳密に比較した。たとえば $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$ であり、これは数値的な差分商（difference quotient）とも一致する。$\triangle$ はこうして確かめられた。

よくある間違い

- 「導関数だから」という理由で $\triangle(\text{定数}) = 0$ と断定すること。これは最終的な答えを前提としている。規則から導かなければならない。
- 長い和に対して、断りなく規則 (ii) を用いること。規則 (ii) は 2 つの多項式について述べたものなので、より多くの項に対しては帰納法による一文が必要である。
- どこでどの規則を用いたかを述べないこと。問題文ではこれを明示的に求めている。

STEP のその先へ

線形性と積の法則を満たす演算は**導分**（derivation）とよばれる。ここでの議論は、多項式上の導分が x における値によって完全に決まることを示している。もし代わりにある多項式 p について $\triangle x = p(x)$ であるならば、同じ証明により $\triangle h = p(x)\,h'(x)$ が得られる。極限をまったく使わずに微分を代数的に定義できるという考え方は、抽象代数学（abstract algebra）や微分幾何学（differential geometry）において中心的なものである。微分幾何学では、ベクトル場（vector field）とはまさに関数上の導分のことである。代数的に扱われる多項式環（polynomial ring）に出会うには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。