解答例

STEP III 2006、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP III 2006、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q7

鍵となる考え方

どちらの微分方程式（differential equation）も $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ についての二次方程式（quadratic）になっている。いきなり微分方程式として取り組むのではなく、それぞれの二次方程式を導関数（derivative）について解く。すると方程式は二つの通常の一階微分方程式に分かれる。双曲線関数の恒等式（hyperbolic identities）を使うと根が簡単な形にまとまり、$x = 0$ における条件によってどちらの根をたどればよいかが決まる。

解答

小問 (i)

解の公式（quadratic formula）により、

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

である。ここで $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ かつ $\cosh x > 0$ を用いた。$\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$ と $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ を使うと、二つの根は

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

となる。

この微分方程式は、上の二次方程式で $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ としたものである。したがって、すべての x において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

が成り立たなければならない。一つ目の根はつねに正、二つ目の根はつねに負であるから、両者が一致することはない。よって導関数が連続な解は、一方の根から他方の

根へ飛び移ることができず、$x = 0$ における条件 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$ により、全域で一つ目の根が選ばれる。積分すると $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$ であり、$x = 0$ で $y = 0$ であることから $c = 1$ となる。すなわち

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

である。

小問 (ii)

$p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ とおく。$\sinh y = 0$、すなわち $y = 0$ のとき、方程式は $2p = 0$ となる。これが $y \equiv 0$ が解となる理由であり、問題文で除外するよう指示されている解である。$y \neq 0$ のところでは、解の公式により

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

となる。半角の公式（half-angle formulae）$\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$、$\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$、$\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$ を用いると、二つの根は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

となる。両者の積は -1 であるのに対し、根が等しければ積は $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$ となるはずなので、これらが一致することはない。

考えてみよう 二つの方程式のうち、恒等的に 0 ではない原点を通る解を与えうるのはどちらか。

一つ目の方程式 $y' = \tanh \frac{y}{2}$ は解 $y \equiv 0$ をもつ。右辺は y の滑らかな関数であるから、$(0,0)$ を通る解はこれだけであり、これはまた自明な解（trivial solution）である。二つ目の方程式は $y = 0$ で特異であり、そこでは $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$ となるので、その解曲線は鉛直な接線をもって $y = 0$ と交わることができる。求めるのはこちらである。変数分離（separation of variables）により、

$$\int \tanh \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln \cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

$x = 0$ で $y = 0$ とおくと $C = 0$ であるから、$\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$ となる。$\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$ であるから、

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

である。これは直接確かめることができる。微分すると $\sinh y \, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$ となり、これはまさに $y' = -\coth \frac{y}{2}$ である。これは y の正負どちらに対しても成り立つので、上半分と下半分を合わせた曲線全体が解となる。$\cosh y \geq 1$ であるから、曲線は $x \leq 0$ の範囲にのみ存在する。また曲線は x 軸に関して対称である。原点の近くでは $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$ であるから、そこで曲線は放物線 $y^2 = -4x$ のように見える。

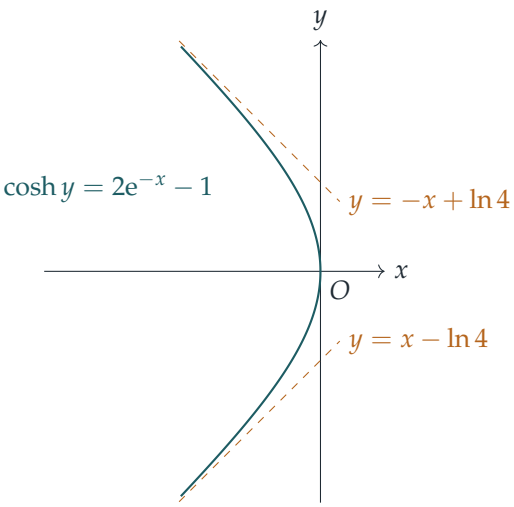
漸近線（asymptote）。 $x \to -\infty$ のとき $\cosh y \to \infty$ であるから、$|y| \to \infty$ となる。$w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$ とおくと、

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

であるから、

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\left(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}} \left(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\right)\right).$$

となる。$x \to -\infty$ のとき $w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$ かつ $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$ であるから、対数の中身は 1 に収束し、差は 0 に収束する。したがって曲線の上半分は $y = -x + \ln 4$ に近づき、対称性により下半分は $y = -(-x + \ln 4)$ に近づく。よって漸近線は $y = \pm(-x + \ln 4)$ であり、題意が示された。（$x \to 0^-$ のとき曲線は有界にとどまるので、漸近線はこれらだけである。）



検算

- (i) において、$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ は $y' = \mathrm{e}^{-x}$ を満たし、$\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x} \sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$ となる。
- (ii) において、$y' = -\coth \frac{y}{2}$ を原点の近くから $x = -6$ まで数値的に追っていくと $y \approx 7.38505$ となり、$\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^{6} - 1)$ と一致する。$x = -10$ では、曲線と $-x + \ln 4$ の差はおよそ 2×10^{-5} である。

よくある間違い

- (i) で根 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^{x}$ を選んでしまう。この根では $x = 0$ における導関数が負になる。
- (ii) で、$y = 0$ において「振る舞いがよい」という理由で $y' = \tanh \frac{y}{2}$ を選んでしまう。原点を通る解としては $y \equiv 0$ しか得られない。
- 曲線の下半分を忘れる。下半分は $y < 0$ の部分であり、二本目の漸近線を得るのに必要である。

STEP のその先へ

これらのように y' について線形でない方程式は、陰的な一階微分方程式（first-order implicit equation）とよばれる。y' について解くと、方程式はいくつかの分枝に分かれる。小問 (ii) は、解の一意性（uniqueness）が成り立たない場合があることも示している。$y = 0$ において右辺 $-\coth \frac{y}{2}$ はリプシッツ連続（Lipschitz）ではなく、そのために $y \equiv 0$ と同じ点から自明でない解が出発できるのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、存在と一意性の定理と、それらが適用できる条件が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。