解答例

STEP III 2006、第 6 問

純粋数学 ・ 極方程式の曲線と反射

STEP III 2006、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q6

鍵となる考え方

勾配の公式は、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に連鎖律（chain rule）を適用しただけのものである。鏡については、極（pole）を O に置き、始線（initial line）を L に沿ってとる。すると点 P で反射した光線は動径に沿ってまっすぐ戻っていくので、その向きは θ だけで決まる。反射の法則（law of reflection）によれば、法線（normal）は二つの光線のなす角を二等分するので、法線（したがって接線（tangent））は θ によって決定される。これにより幾何の問題が $r(\theta)$ についての変数分離形の微分方程式（separable differential equation）に帰着される。

解答

極座標における勾配

$r = r(\theta)$ で与えられる曲線の直交座標は $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ であり、r は θ の関数である。積の微分法（product rule）により θ で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

連鎖律により、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ であるところでは

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

となる。ここで分子と分母を $\cos\theta$ で割った（$\cos\theta \neq 0$ のとき許される）。これが求める勾配である。

割る前の形も残しておく価値がある。ベクトル

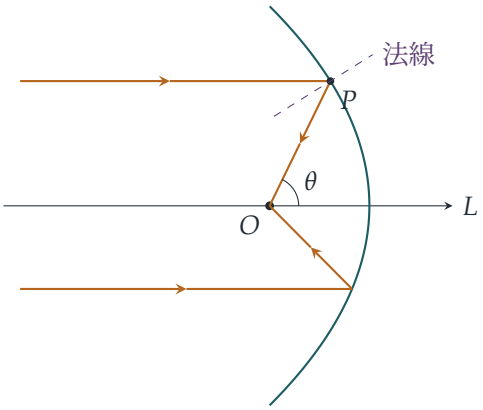
$$\mathbf{t} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

は、$\tan\theta$ や勾配が定義されない点も含めて、曲線上のすべての点で接線の向きを向いている。

鏡

L を含む任意の平面 Π をとり、P を鏡と Π の交わりの上の点とする。P への入射光線は L に平行なので Π に含まれる。反射光線は L 上の点 O を通るので、これも Π に含まれる。反射の法則より、P における法線も二つの光線を含む平面上にあるので、法線は Π に含まれ、P における交線の接線は Π 内でそれに垂直な直線である。したがってすべては平面 Π の中で起こり、2 次元で考えればよい。

Π において、O を極とし始線を L に沿ってとる極座標（polar coordinates）を用いる。向きは、入射光が $\theta = 0$ の向き（図では左から右）に進むように定める。P を (r, θ) とし、$-\pi < \theta < \pi$ とする。（$\theta = \pi$ の点は O の後ろ側の L 上にあり、そこでは光線は鏡を必要とせずにまっすぐ O を通過する。）



法線の向き。 P において、光線に沿って P から離れる向きの二つの単位ベクトルをとる：

$\mathbf{a} = (-1, 0)$（入射光線を逆にたどる向き），　$\mathbf{b} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$（$O$ へ向かう向き）.

法線は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ と等しい角をなすので、それらのなす角の二等分線（bisector）に沿っており、その向きは $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の向きである（二つの単位ベクトルが作るひし形（rhombus）の対角線は、それらのなす角を二等分する）。ここで

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(1 + \cos\theta,\ \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

である。ただし $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。$-\pi < \theta < \pi$ より $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ なので、これは零ではなく、P における法線は

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\, \sin\tfrac{\theta}{2}\right):$$

の向きである。すなわち、法線は L と角 $\frac{\theta}{2}$ をなす。

考えてみよう 勾配の公式を接線の勾配と等しいとおくだけではいけないのはなぜか？

それでもよい。接線は $\mathbf{n}$ に垂直なので、その勾配は $-\cot\frac{\theta}{2}$ であり、これを極座標の公式と等しいとおいて分母を払うと、下と同じ方程式が得られる。しかしその方法では $\tan\theta$、$\cot\frac{\theta}{2}$ および公式の分母で割ることになるので、$\theta = 0$ や $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ で破綻する。接ベクトル $\mathbf{t}$ を使えば、そうした問題をすべて回避できる。

微分方程式。 接線は法線に垂直なので $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$ である：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right) + r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right) = 0.$$

加法定理（compound-angle formulae）により、括弧内はそれぞれ $\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$ および $\sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta\right) = -\sin\frac{\theta}{2}$ である。よって

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2} = r\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

となる。ここで $r\cos\frac{\theta}{2}$ で割ったが、$P \neq O$ かつ $-\pi < \theta < \pi$ なのでこれは正である。

方程式を解く。 この方程式は変数分離形である。θ について積分し、$\int \tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$（$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ なので成り立つ）に注意すると、

$$\ln r = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2} = k,$$

を得る。ここで $k = \mathrm{e}^C > 0$ は曲線に沿って一定である（曲線は区間 $-\pi < \theta < \pi$ 上の連結な一つの部分 $r = r(\theta)$ である）。$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$ を用いると、

$$r(1+\cos\theta) = 2k.$$

直交座標への変換。 $x = r\cos\theta$ と $r = \sqrt{x^2+y^2}$ を用いると、これは $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ となる。両辺を 2 乗すると（$2k - x = r \geq 0$ なので両辺とも非負である）、

$$x^2 + y^2 = 4k^2 - 4kx + x^2 \qquad\Longrightarrow\qquad y^2 = 4k(k-x).$$

これは軸（axis）が L、頂点（vertex）が $(k, 0)$、焦点（focus）が原点 O の放物線（parabola）であり、入射光の来る側に向かって開いている。Π は L を含む任意の平面であったから、鏡はそのようなすべての平面と放物線で交わる。これで示された。■

検算

- 逆にたどる：$y^2 = 4k(k-x)$ 上では法線は $(4k, 2y)$ の向きであり、向き $(1,0)$ をこの法線に関して反射させると O を通る光線が得られる。$k = 1.3$ としてランダムな 10^4 個の点で数値的にこれを確かめ、また $r = 2k/(1+\cos\theta)$ が $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ を満たすことを差分（finite differences）で確かめた。
- 勾配の公式は、ランダムな曲線 $r(\theta)$ の差分による勾配と約 10^{-8} の精度で一致した。
- $\theta = 0$ では法線は L に沿い、接線は L に垂直である。これは頂点 $(k,0)$ であり、そこでは L に沿った光線がまっすぐ反射して O を通る。

よくある間違い

- 法線として外角の二等分線（external bisector）$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ を用いてしまう。この向きは二つの光線と等しい角ではなく補角（supplementary angles）をなし、$r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$ を導く。その解 $r(1-\cos\theta) = 2k$ は逆向きの放物線であり、反対方向から来る光を集める。
- 問題が 2 次元に帰着する理由の説明を忘れる：法線は L と P を含む平面上になければならず、そうでなければ交線が我々の用いた接線をもつとは限らない。
- 両辺が非負であることに触れずに $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$ を 2 乗してしまう。

STEP のその先へ

この鏡は回転放物面（paraboloid of revolution）であり、ここで証明した性質は姿を変えた焦点・準線（directrix）の性質である：$r(1+\cos\theta) = 2k$ は、O からの距離が直線 $x = 2k$ からの距離に等しいことを述べている。衛星放送用アンテナ、自動車のヘッドライト、反射望遠鏡が回転放物面の形をしているのはこのためである。より一般に、2 次曲線（conics）はすべて極座標で $r(1+e\cos\theta) = \ell$ の形に表され、これはまさにニュートン（Newton）による惑星軌道の解に現れる形である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これを逆 2 乗則（inverse-square law）から導いている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。