解答例

STEP III 2006、第 5 問

純粋数学 • 複素数と図形

STEP III 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q5

鍵となる考え方

三角形が正三角形（equilateral triangle）であるのは、ある頂点から見て、一つの辺が別の辺を 60° 回転させたものになっているとき、かつそのときに限る。複素数（complex numbers）では、この回転は $e^{\pm i\pi/3}$ を掛けることにあたり、この二つの数はちょうど $t^2 - t + 1 = 0$ の解である。原点を一つの頂点に移すと、対称な式はまさにこの二次式（quadratic）になる。その後、三次方程式（cubic）の部分は解と係数の関係（Vieta's formulae）で処理でき、最後の部分は $z \mapsto pw + q$ が図形を回転、拡大縮小、平行移動するだけだという観察に帰着する。

解答

正三角形の条件

頂点 α から出る二辺を $u = \beta - \alpha$、$v = \gamma - \alpha$ とおく。三点は相異なるので、$u \neq 0$、$v \neq 0$、$u \neq v$ である。まず、

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2],$$

が成り立つことは、右辺を展開すればわかる。ここで $\alpha - \beta = -u$、$\gamma - \alpha = v$、$\beta - \gamma = u - v$ であるから、括弧の中は $u^2 + (u - v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$ となる。したがって

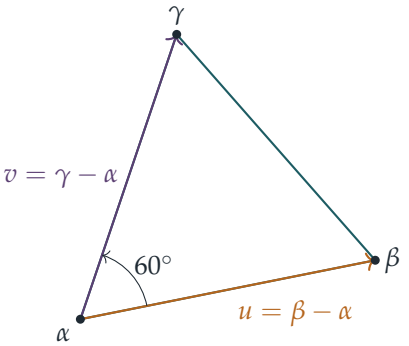
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2(t^2 - t + 1), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

$u \neq 0$ であるから、この式が消えるのは $t^2 - t + 1 = 0$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$t = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}.$$

考えてみよう なぜ $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ が、三角形が正三角形であることをちょうど表しているのだろうか。

v/u の絶対値（modulus）は $|\gamma - \alpha|/|\beta - \alpha|$ であり、その偏角（argument）は α における辺 $\alpha\beta$ から辺 $\alpha\gamma$ への角である。よって $v/u = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ は、α から出る二辺の長さが等しく、そのなす角が $60°$ であることを意味する。このような二等辺三角形（isosceles triangle）の底角は $\frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$ であるから、正三角形である。逆に、三角形が正三角形ならば $|v| = |u|$ であり、α における角は $60°$ で、向きに応じてどちらかの方向に回転しているので、$v/u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ または $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$ となる。



以上より、相異なる三点が（どちらの順序であれ）正三角形をなすのは、この式が零となるとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

三次方程式

$(*)$ の解を α, β, γ とする。解と係数の関係より、$\alpha + \beta + \gamma = -a$、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ である。よって

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= a^2 - 3b.\end{aligned}$$

最初の結果より、（相異なる）解が正三角形をなすのは $a^2 - 3b = 0$、すなわち $a^2 = 3b$ のとき、かつそのときに限る。

一つ注意がある。最初の結果は三点が相異なることを必要とする。二つの解が一致する場合、たとえば $\alpha = \beta$ のとき、式は $(\gamma - \alpha)^2$ となるので、これが消えるのは三つ

の解がすべて等しいときに限る。したがって、重解をもちながら $a^2 = 3b$ となるのは三重解（triple root）の場合、すなわち $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$ であり、さらに $c = a^3/27$ も成り立つ場合だけである。この一点からなる退化した「三角形」を除けば、$a^2 = 3b$ がちょうど求める条件である。

変換

$(*)$ に $z = pw + q$ を代入し、$p^3 \neq 0$ で割ると

$$w^3 + \frac{3q + a}{p}\, w^2 + \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2}\, w + \frac{q^3 + aq^2 + bq + c}{p^3} = 0.$$

よって

$$A = \frac{3q + a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2 + 2aq + b}{p^2},$$

であり、したがって

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2 + 6aq + a^2) - (9q^2 + 6aq + 3b)}{p^2} = \frac{a^2 - 3b}{p^2}.$$

$(*)$ の解が正三角形をなすならば、それらは相異なり $a^2 = 3b$ であるから、$A^2 = 3B$ となる。$(**)$ の解は、$(*)$ の解 z に対する $w = (z - q)/p$ である。$p \neq 0$ よりこの写像は一対一（one-to-one）であるから、これらの解も相異なる。前の結果より、$(**)$ の解は正三角形をなす。

幾何学的には、これは驚くことではない。$w = (z - q)/p$ は $-q$ だけ平行移動し、$-\arg p$ だけ回転し、$1/|p|$ 倍に拡大縮小する変換であり、いずれも正三角形を崩さない。最初の部分の言葉でいえば、各辺が p で割られるので、比 v/u は変わらない。

検算

- 1 の三乗根 $1, \omega, \omega^2$ は正三角形をなし、$z^3 - 1 = 0$ の解であって、$a = b = 0$ であるから $a^2 = 3b$ が成り立つ。
- $\alpha = 0$、$\beta = 1$、$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ のとき、式は $1 + \gamma^2 - \gamma$ となり、$\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ は $t^2 - t + 1$ の根であるから、これは零である。
- 1000 組のランダムな三つ組に対する数値計算により、それらを解とする三次方程式について $\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$ が確認された。同じ計算により、$A^2 - 3B = (a^2 - 3b)/p^2$ であること、およびランダムな p、q のもとで正三角形をなす解が正三角形のままであることも確認された。

よくある間違い

- 一方の向きしか確かめないこと。$e^{i\pi/3}$ と $e^{-i\pi/3}$ の両方が現れ、「必要十分」を示すには両方が必要である。
- u^2 で割ることができるのは $u \neq 0$（三点が相異なること）のおかげであることを忘れること。
- 代入の際に B を誤ること。w の係数は、三乗から出る $3q^2$、二乗から出る $2aq$、そして b を集めたものを、すべて p^2 で割ったものである。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto pz + q$ は平面の向きを保つ相似変換（direct similarities）である。比 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$ や $a^2 - 3b$ が零であることのように、これらの変換で変わらない量は**不変量**（invariants）とよばれ、幾何学と代数学の中心的な概念である。式 $a^2 - 3b$ は、$f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ としたとき、（定数倍を除いて）f' の判別式（discriminant）である。これは Marden の定理（Marden's theorem）という美しい事実につながる。すなわち、f' の根は、f の根がなす三角形の各辺にその中点で接する楕円（ellipse）の焦点（foci）である。正三角形の場合、この楕円は円となり、その二つの焦点は f' の重根に一致する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、まさにこの精神で複素数の幾何学を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。