解答例

STEP III 2006、第 4 問

純粋数学 • 関数方程式

STEP III 2006、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q4

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）はコーシー（Cauchy）の関数方程式（functional equation）である。$y = x$ とおくと、x における f の値と $2x$ における値の関係が得られ、その関係式を n 回微分して $x = 0$ とおくと、マクローリン係数（Maclaurin coefficient）のほとんどすべてが消える。後に続く各小問は、姿を変えた同じ方程式である。変数変換（change of variable）（対数、指数関数、正接）によって新しい恒等式は $(*)$ に戻るので、すでに得た答えを利用できる。

解答

基本となる方程式

$(*)$ において $y = x$ とおくと $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$、すなわち

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

これは x についての恒等式であるから、両辺を微分してよい。合成関数の微分法（chain rule）により、$\mathrm{f}(2x)$ を 1 回微分するごとに因数 2 が出てくるので、n 回微分すると

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

$x = 0$ とおくと $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$ を得る。$n = 2$ のとき、これは $-2\mathrm{f}''(0) = 0$ となるから、求めるとおり $\mathrm{f}''(0) = 0$ である。

同じ議論は $n \neq 1$ であるすべての場合に成り立つ。因数 $2 - 2^n$ が 0 になるのは $n = 1$ のときに限るので、

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \ \text{任意の} n \geq 2.$$

($n = 0$ の場合は単に $2f(0) = f(0)$ である。) マクローリン級数 (Maclaurin series) のうち、1 次の項だけが残る：

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = f'(0).$$

逆に $kx + ky = k(x + y)$ であるから、このような関数はすべて条件を満たす。$(*)$ の最も一般的な解 (一般解 (general solution)) は $f(x) = kx$ である。ただし k は任意の定数である。

小問 (i)

対数 (logarithm) をとるには $g > 0$ が必要なので、まず符号を調べる。$x = y = \frac{1}{2}s$ とおくと $g(s) = (g(\frac{1}{2}s))^2 \geq 0$ を得る。ある a について $g(a) = 0$ ならば、すべての x について

$$g(x) = g(a)\,g(x - a) = 0,$$

となるので $g \equiv 0$ であり、これは確かに恒等式を満たす。そうでなければ、すべての x について $g(x) > 0$ であり、$G = \ln g$ はいたるところで定義される。$g(x)g(y) = g(x+y)$ の対数をとると

$$G(x) + G(y) = G(x + y),$$

となり、これはまさに $(*)$ である。よって $G(x) = kx$ であり、

$$g(x) = e^{kx}$$

(k は定数) を得る。$e^{kx}e^{ky} = e^{k(x+y)}$ であるから、これが条件を満たすことは明らかである。自明な解 (trivial solution) $g \equiv 0$ を除けば、これらが解のすべてである。

小問 (ii)

正の数 x はどれも、ただ 1 つの実数 u、すなわち $u = \ln x$ を用いて e^u と表される。したがって $x = e^u$、$y = e^v$ と書くことができ、u と v はすべての実数を動く。このとき $xy = e^{u+v}$ であり、恒等式は

$$H(u) + H(v) = h(e^u) + h(e^v) = h(e^{u+v}) = H(u + v)$$

(すべての実数 u, v について) となる。これは再び $(*)$ であるから、$H(u) = ku$ である。$u = \ln x$ であるから

$$h(x) = k \ln x \qquad (x > 0),$$

であり、$\ln x + \ln y = \ln(xy)$ であるから、これは条件を満たす。

小問 (iii)

式 $\dfrac{x+y}{1-xy}$ は、姿を変えた正接の加法定理（tangent addition formula）である。$u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ として $x = \tan u$、$y = \tan v$ とおく。すなわち $u = \arctan x$、$v = \arctan y$ である。すると

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$ と定義する。$u+v$ もまた $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属するときはいつでも、恒等式から

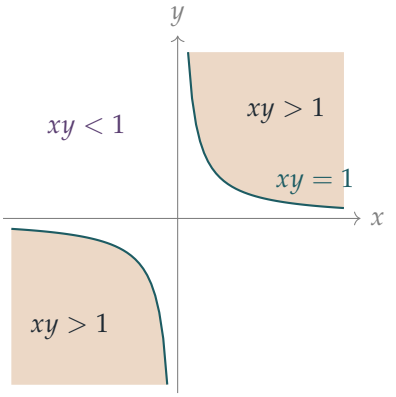
$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}(\tan(u+v)) = \mathrm{T}(u+v).$$

考えてみよう $(*)$ に対する議論では、**すべての** x と y についての恒等式を用いた。u、v、$u+v$ が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属する場合にしか恒等式がわかっていないときでも、その議論は通用するだろうか？

通用する。マクローリン展開による議論は 0 の近くしか見ていない。$|u| < \frac{\pi}{4}$ ならば $v = u$ とおいてよく（このとき $|2u| < \frac{\pi}{2}$）、0 の近くで $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$ を得る。$u = 0$ において n 回微分すると、先ほどとまったく同様に $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$ となるので、$\mathrm{T}(u) = ku$ である。$u = \arctan x$ であるから

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

これは実際にどのような x と y について成り立つのだろうか。$xy < 1$ ならば $u+v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。u と v が異符号のときは、これは自動的に成り立つ。ともに正のときは、$\tan u \tan v < 1$ は $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$ を意味するので $u + v < \frac{\pi}{2}$ となり、ともに負の場合も対称性により同様である。したがって $\arctan x + \arctan y = \arctan z$ であり、恒等式が成り立つ。しかし $xy > 1$ ならば $u+v$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の外にあり、このとき $\arctan z = u + v \mp \pi$ となる。たとえば $x = y = 2$ のとき $z = -\frac{4}{3}$ であり、$2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$ である。



よって $\mathrm{t}(x) = k \arctan x$ は、$xy < 1$ を満たすすべての組、すなわち図で原点を含む領域において恒等式を満たす。これが問題の意図する答えである。網かけ部分の領域 $xy > 1$ では、両辺は $\pm k\pi$ だけずれる。$xy \neq 1$ を満たす文字どおりすべての組について恒等式を要求するならば、$k = 0$ だけが残り、解は $\mathrm{t} \equiv 0$ のみとなる。

検算

- 小問 (iii) について、恒等式を y で偏微分してから $y = 0$ とおく。$\partial z/\partial y = (1 + x^2)/(1 - xy)^2$ であり、$y = 0$ ではこれは $1 + x^2$ となるので、$\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1 + x^2)$ を得る。よって $\mathrm{t}'(x) = k/(1 + x^2)$ であり、$\mathrm{t}(0) = 0$ とあわせて積分すると $k \arctan x$ となる。同じ方法を $(*)$ に用いると、ただちに $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$ が得られる。
- 4 つの答えすべてを、それぞれ 10^4 組の無作為な組で数値的に確かめた。小問 (iii) では、$k \arctan x$ は $xy < 1$ を満たす約 5×10^4 組の無作為な組のすべてで恒等式を満たし、$xy > 1$ を満たすすべての組では、ずれの大きさがちょうど $k\pi$ であった。

よくある間違い

- 定数項を忘れる：$\mathrm{f}(0) = 0$ は $n = 0$ の場合から得られるので、答えは kx であり、$kx + c$ ではない。
- $\mathrm{g} > 0$ を確かめずに $\ln \mathrm{g}$ をとる。零関数は小問 (i) の正真正銘の解である。
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$ が常に成り立つと思い込む。これには $xy < 1$ が必要である。

STEP のその先へ

マクローリン級数をもつという仮定がなくても、コーシーの方程式 $(*)$ はずっと少ない仮定で解ける。f が単に連続（continuous）であれば（あるいはある区間で有界（bounded）であるだけでも）、有理数（rational number）q に対する $\mathrm{f}(q) = q\,\mathrm{f}(1)$ から出発して、やはり $\mathrm{f}(x) = kx$ が導かれる。しかし選択公理（axiom of choice）を用いると、線形でない奇妙な解を構成することができ、そのグラフは平面内で稠密（dense）になる。小問 (i) はまた、指数関数（exponential function）が加法から乗法への連続な準同型（homomorphism）として本質的にただ 1 つであることも示しており、この考え方は群論（group theory）の至るところに再び現れる。この種の連続性や稠密性の議論が丁寧に展開されている様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。