解答例

STEP III 2006、第 3 問

純粋数学 • べき級数の係数

> **STEP III 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q3

鍵となる考え方

$\tan x$ を何度も微分する必要はまったくない。三角関数の恒等式（identity）はそれぞれこれらの関数のうち二つを結びつけるので、それは係数どうしの関係に置き換わる。x^n の係数を比較（comparing coefficients）すれば、三つの級数（series）はすべてただ一つの数列 b_n によって決まる。そのうえでピタゴラスの恒等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ から b_n が満たすべき方程式が得られ、それを一つずつ解いていけばよい。

解答

小問 (i)

0 の近くである関数に収束（converge）する冪級数（power series）は、その関数のマクローリン級数（Maclaurin series）にほかならないので、$a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$ である。さて、tan は奇関数（odd function）である：$\tan(-x) = -\tan x$。奇関数を微分すると偶関数（even function）になり、偶関数を微分すると奇関数になる。したがって tan の偶数階の導関数（derivative）はすべて奇関数であり、奇関数は 0 において値が零になる。よって偶数の n に対して $\tan^{(n)}(0) = 0$ であり、したがって偶数の n に対して $a_n = 0$ である。言い換えれば、この級数には x の奇数乗の項しか現れない。同じ議論が、やはり奇関数である $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$ にも当てはまり、偶数の n に対して $b_n = 0$ となる。このことは後で示す関係式からも得られる。

恒等式を示すには、全体を $\sin x \cos x$ で通分する：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

ここで $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ とする。すると $2x$ も $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$\cot 2x$ に対して、$2x$ を x の代わりに用いた級数を使うことができる：

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

恒等式の左辺は

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

である。$\frac{1}{x}$ の項は打ち消し合い、x が $(0, \frac{1}{4}\pi)$ のどこにあっても等しい二つの冪級数が残る。

考えてみよう 二つの無限級数の係数を比較してよいのはなぜか？

二つの冪級数がある区間全体で同じ和をもつならば、それらの係数は一致する。実際、差をとると、その差は区間全体で零になる冪級数である。するとその導関数もすべてそこで零であり、$x \to 0^+$ とすればすべての係数が零であることがわかる。したがって

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{すなわち} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

となり、題意の式が示された。$1 - 2^{n+1} \neq 0$ なので $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$ であり、$a_n = 0$ のとき、すなわち n が偶数のときには常に $b_n = 0$ となる。

小問 (ii)

同様に、

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$ のとき、cosec の級数において $2x$ を x の代わりに用いると

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

係数を比較すると $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$ が得られる。小問 (i) の $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$ を代入すると、

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

となり、これが求める結果である。特に、偶数の n に対して $c_n = 0$ でもある。

小問 (iii)

$\cot x$ と $\operatorname{cosec} x$ の級数に x を掛けると、

$$1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\cot x, \qquad 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\operatorname{cosec} x.$$

よって、示すべき等式は $x^2\cot^2 x + x^2 = x^2\operatorname{cosec}^2 x$ ということである。これは x^2 を恒等式 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$ の両辺に掛けたものであり、この恒等式は $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を $\sin^2 x$ で割れば得られる。これで証明された。

次に展開する。添字が偶数の b_n と c_n は零なので、

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

となり、等式は次のようになる。

$$(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots)^2 + x^2 = (1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots)^2.$$

平方を展開すると、

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

小問 (ii) より $c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$、$c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$ である。

x^2 の係数：

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

すると小問 (i) より $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$ となり、題意のとおりである。

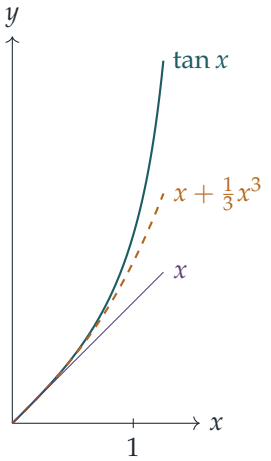
x^4 の係数： $b_1 = -\frac{1}{3}$、$c_1 = \frac{1}{6}$ とすると、

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{15}{4}\,b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

よって

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

したがって $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ である。



検算

- $x = 0.3$ のとき $\tan 0.3 \approx 0.309336$ であり、$0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$ である。差は約 3×10^{-4} で、これは次の項 $\frac{2}{15}x^5$ の大きさである。
- 値 $b_1 = -\frac{1}{3}$ はよく知られた $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$ と一致する。また $c_1 = \frac{1}{6}$ は $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$ と一致し、これは $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ から導ける。
- sin と cos の級数の割り算によって、n が 48 以下のすべての場合について三つの関係式を厳密に（有理数演算で）確認した。また、$(0,1)$ 内のランダムな点で部分和（partial sums）が tan、cot、cosec と一致することも確認した。

よくある間違い

- $\frac{1}{x}$ の項を忘れたまま係数を比較してしまう。これらの項は打ち消し合うが、それは因子 2 が $2\cot 2x$ と $2\operatorname{cosec} 2x$ に付いているからにほかならない。
- 小問 (iii) で平方を展開するときに $b_0 = b_2 = 0$ を忘れる。b_0 を残すと x の奇数乗の余計な項が現れ、それらの係数が消えることを別に示さなければならなくなる。
- $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$ の符号や 2 の冪を間違える。$2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$ であることに注意する。

STEP のその先へ

この方法をさらに高次まで進めると、係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）B_{2k} であることがわかる：$x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$。そして小問 (i) の因子 $1 - 2^{n+1}$ から、$\tan x$ の係数の一般公式が得られる。$\tan x$ の級数が $|x| = \frac{1}{2}\pi$ で収束しなくなるのはなぜだろうか？その答えは複素解析（complex analysis）が与える：冪級数は関数が発散する最も近い点まで収束し、tan の場合それは $\pm\frac{1}{2}\pi$ にある極（pole）である。Needham の *Visual Complex Analysis* はこれを見事に説明しており、Abbott の *Understanding Analysis* は冪級数の項ごとの比較を厳密に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。