解答例

# STEP III 2006、第 2 問

純粋数学 • 対称性を用いた定積分

**STEP III 2006、問 2**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q2

## 鍵となる考え方

区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は対称であるから、$\theta$ を $-\theta$ に置き換えると $I$ のもう一つの表示が得られる。二つを足し合わせると、分母にある厄介な $\sin\theta$ が消える。すべてを $\tan\theta$ で書き直すと、積分 $I$ と $J$ は同じ分母をもち、両者をうまく組み合わせると被積分関数（integrand）がちょうど 1 になる。全体を通して $\cos 2\alpha$ の符号に注意しておくこと。最後の小問で変わるのはまさにこの符号である。

## 解答

$s = \sin 2\alpha$、$c = \cos 2\alpha$ とおく。すると $s^2 + c^2 = 1$ である。考える $\alpha$ の二つの範囲（$\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$）のいずれにおいても $0 < s < 1$ であるから、$1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$ となる。したがって $I$ の被積分関数は区間全体で連続である。

### 小問 (i)

$\theta = -\phi$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、積分の上端と下端が入れ替わる。$\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$、$\sin(-\phi) = -\sin\phi$ であるから、

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

となり、（$\phi$ を $\theta$ と書き直せば）これが一つ目の結果である。

$I$ の二つの表示を足し合わせると、

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

ここで分子と分母を $\cos^2\theta$（区間の内部では 0 でない）で割ると、

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sec^2\theta - s^2\tan^2\theta} = \frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)} = \frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ と $1-\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$ を用いた。よって

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

となり、示すべき式が得られた。（$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ ではこの被積分関数は 0 に近づくので、端点で問題は生じない。）

**小問 (ii)**

分子に $\sec^2\theta$ があることから、$t = \tan\theta$、$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ と置換するのが自然である。$\theta$ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、$t$ は実数直線全体を動く。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ より $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$c > 0$ である。$u = ct$ とおくと、

$$J = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{c}\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{c} = \pi\sec 2\alpha.$$

**小問 (iii)**

小問 (i) より $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$ であり、これは $J$ と同じ分母をもつ。したがって

$$s^2I + c^2J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

**考えてみよう** なぜこの特定の組み合わせを考えると簡単になるのだろうか。

分子を見てみよう。$s^2 + c^2\sec^2\theta = s^2 + c^2 + c^2\tan^2\theta = 1 + c^2\tan^2\theta$ である。これはちょうど分母に等しいので、被積分関数は 1 となり、

$$s^2I + c^2J = \pi.$$

小問 (ii) の $J = \pi/c$ を用いると、

$$s^2I = \pi - \pi c = \pi(1-c) \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c},$$

となる。ここで $s^2 = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$ を用い、$1-c \neq 0$（$c < 1$ より）で約分した。最後に $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ であるから、

$$I = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha. \qquad \checkmark$$

### 小問 (iv)

今度は $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$ である。依然として $0 < s < 1$ であるが、今度は $c < 0$ となる。小問 (i) では $s^2 + c^2 = 1$ しか用いていないので、その結果はそのまま成り立ち、小問 (iii) の恒等式 $s^2 I + c^2 J = \pi$ も成り立つ。変わるのは小問 (ii) だけである。

**考えてみよう** 小問 (ii) では、正確にはどこで $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ を用いたのだろうか。

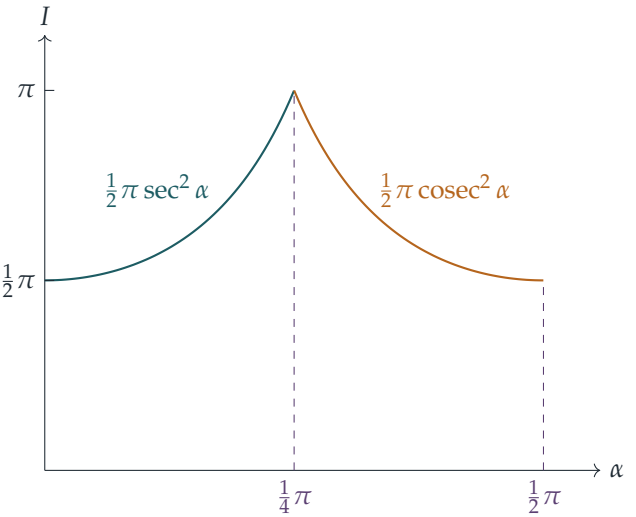
置換 $u = ct$ においてである。$c < 0$ ならば $u$ の積分範囲は $+\infty$ から $-\infty$ となり、これを入れ替えて元に戻すと負の符号が出る。つまり $J = \pi/|c| = -\pi/c$ である。（こうでなければならない。$J$ は正の関数の積分であるから、負の数 $\pi \sec 2\alpha$ に等しくなることはありえない。）すると

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

となる。ここで $1 + c \neq 0$（$c > -1$ より）で約分した。$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ であるから、

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

手早く確かめる方法もある。$I$ は $\sin 2\alpha$ を通してのみ $\alpha$ に依存し、$\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$ である。よって $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$ となる。$I$ のグラフは $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ に関して対称であり、そこでは二つの式はともに $\pi$ を与える。



## 検算

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（$c = 0$）のとき、小問 (i) の 2I の形の被積分関数は 2 となり、$I = \pi$ を与える。これは二つの式のどちらとも一致する。
- $\alpha \to 0$ のとき $I \to \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$ となり、$\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$ と一致する。
- 数値的に（元の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用して）調べると、$\alpha = 0.5$ では $I \approx 2.039595$ となり、$\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$ に等しい。また $\alpha = 1.1$ では $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$ となる。調べたすべての場合で、$s^2 I + c^2 J$ は 3.141593 となった。

## よくある間違い

- 小問 (iv) でも $J = \pi \sec 2\alpha$ と書いてしまうこと。この範囲ではこれは負であり、正の関数の積分としてはありえない。
- 置換 $t = \tan\theta$ によって有限区間が実数直線全体に移り、積分範囲が $\pm\infty$ になることを忘れること。

## STEP のその先へ

小問 (i) の工夫、すなわち $f(\theta)$ と $f(-\theta)$ の平均をとることは、関数を偶関数部分と奇関数部分（even and odd parts）に分解する考え方の出発点である。対称な区間上で積分すると、偶関数部分だけが残る。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の有理関数を一周期にわたって積分することは、複素解析（complex analysis）の最初の講義における周回積分（contour integration）、すなわち留数定理（residue theorem）の古典的な応用であり、そこではこのような結果がわずか数行で得られる。Needham, *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。