解答例

STEP III 2006、第 14 問

確率・統計 ・ 共分散と独立性

STEP III 2006、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q14

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて二つの事実に基づいている。期待値（expectation）は線形であること、そして独立（independent）な確率変数については積の期待値が期待値の積に等しいことである。分散（variance）は $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2$ から求まるので、必要になるのは期待値だけである。二つの確率変数が独立でないことを示すには、独立性から導かれる帰結のうち成り立たないものを一つ見つければ十分であり、最も確かめやすいのは $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)$ である。

解答

二つの事実

任意の確率変数と定数 a, b に対して

$$\mathrm{E}(aX_1 + bX_2) = a\,\mathrm{E}(X_1) + b\,\mathrm{E}(X_2),$$

が成り立ち、さらに X_1 と X_2 が独立ならば

$$\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2).$$

が成り立つ。二つ目の事実は確率変数の関数にも適用できる。X_1, X_2 が独立ならば、X_1^2 と X_2、X_1 と X_2^2、X_1^2 と X_2^2 もそれぞれ独立である。また $\mathrm{E}(X_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2$ も用いる。これは $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mu_i^2$ を変形しただけのものである。

周の長さと面積

周の長さは $P = 2X_1 + 2X_2$、面積は $A = X_1X_2$ である。線形性と独立性により

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2), \qquad \mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

P の分散は $\mathrm{E}(P^2)$ から求める。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P^2) &= 4\,\mathrm{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4(\mu_1 + \mu_2)^2,\end{aligned}$$

ここで線形性と $\mathrm{E}(X_1X_2) = \mu_1\mu_2$ を用いた。$[\mathrm{E}(P)]^2 = 4(\mu_1 + \mu_2)^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(P) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{よって} P \text{の標準偏差は} 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

A については、X_1^2 と X_2^2 が独立であるから

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X_1^2)\,\mathrm{E}(X_2^2) = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2),$$

であり、$\mu_1^2\mu_2^2$ を引くと

$$\mathrm{Var}(A) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,$$

が残る。したがって A の標準偏差（standard deviation）は

$$\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

である。

P と A は独立でない

P と A が独立ならば $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$ が成り立つはずである。ところで $PA = 2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2$ であるから、線形性と X_1, X_2 の独立性により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(PA) &= 2(\sigma_1^2 + \mu_1^2)\mu_2 + 2\mu_1(\sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2 + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)\\ &= \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A) + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

縦の長さと横の長さは正であるから $\mu_1, \mu_2 > 0$ であり、また $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ であるから、余分な項 $2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)$ は真に正である。よって $\mathrm{E}(PA) \neq \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$ となり、P と A は独立でない。

確率変数 $Z = P - \alpha A$

ここでも、Z と A が独立ならば $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$ が成り立たなければならない。線形性により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ZA) - \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A) &= [\mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)] - \alpha[\mathrm{E}(A^2) - [\mathrm{E}(A)]^2] \\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2) - \alpha(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2),\end{aligned}$$

ここで上の二つの結果を用いた。α に掛かっている括弧は $\mathrm{Var}(A)$ であり、これは正である（$\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0$ を含む）。したがってこの式が 0 になる α の値はちょうど一つであり、それは

$$\alpha_0 = \frac{2(\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2)}{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

である。$\alpha \neq \alpha_0$ ならば $\mathrm{E}(ZA) \neq \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$ であるから、Z と A は独立でない。これが示すべきことであった。

考えてみよう $\alpha = \alpha_0$ ならば Z と A は独立であるといえるだろうか？

いえない。共分散が 0 であることは独立性の帰結ではあるが、独立性を保証するものではない。$\alpha = \alpha_0$ のとき、この判定法からは何の情報も得られないので、別の議論が必要になる。最後の小問では、ある具体的な場合にはそのときも独立性が成り立たないことを示す。

最後の小問

ここでは $\mu_1 = \mu_2 = 2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ であるから

$$\alpha_0 = \frac{2(2+2)}{4+4+1} = \frac{8}{9}.$$

前の小問により、$\alpha \neq \frac{8}{9}$ であるどの α についても Z と A は独立でない。すべての α を一度に扱える議論のために、同様に確からしい四つの結果を列挙する。

(X_1, X_2)	A	P	$Z = P - \alpha A$
$(1,1)$	1	4	$4 - \alpha$
$(1,3), (3,1)$	3	8	$8 - 3\alpha$
$(3,3)$	9	12	$12 - 9\alpha$

鍵となる観察は、P、したがって Z が A によって完全に決まるということである。$z = 4 - \alpha$ とおく。$A = 1$ であることがわかれば $Z = z$ が確定するので

$$\mathrm{P}(Z = z,\ A = 1) = \mathrm{P}(A = 1) = \tfrac{1}{4}.$$

独立であるためには、これが $\mathrm{P}(Z=z)\,\mathrm{P}(A=1)$ に等しくなければならない。すなわち $\mathrm{P}(Z=z)=1$ であり、Z はすべての結果において値 $4-\alpha$ をとらなければならない。そのためには $8-3\alpha=4-\alpha$、すなわち $\alpha=2$ が必要であり、さらに $12-9\alpha=4-\alpha$、すなわち $\alpha=1$ も必要である。これらが同時に成り立つことはないので $\mathrm{P}(Z=z)<1$ であり、独立性は成り立たない。

よって、α がどのような値であっても Z と A は独立でない。たとえば $\alpha=\frac{8}{9}$ のとき、Z の値は $\frac{28}{9}, \frac{16}{3}, 4$ であり、$\mathrm{P}(Z=\frac{28}{9}, A=1)=\frac{1}{4}$ であるのに対して $\mathrm{P}(Z=\frac{28}{9})\,\mathrm{P}(A=1)=\frac{1}{16}$ である。

検算

- ばらつきがない場合（$\sigma_1=\sigma_2=0$）、二つの標準偏差はどちらも 0 になり、当然そうあるべき結果になっている。
- 最後の小問では、公式から $\mathrm{Var}(A)=1+4+4=9$ である。直接計算すると、A は値 $1,3,9$ をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ でとるので、$\mathrm{E}(A)=4, \mathrm{E}(A^2)=25$ となり、分散は 9 である。
- 一般の平均・分散・共分散の公式を、ランダムに生成した 200 個の離散分布に対して分数を用いて厳密に検証した。また、α_0 において $\mathrm{E}(ZA)=\mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(A)$ となること、最後の小問で $\alpha_0=\frac{8}{9}$ となること、そしてそこで $\alpha=\frac{8}{9}$ およびその他 500 個の α の値に対して Z と A が独立でないことも確認した。

よくある間違い

- $\mathrm{E}(X_1^2)=\mu_1^2$ と書いてしまうこと。分散の項 σ_1^2 こそが、$\mathrm{Var}(A)$ と共分散を 0 でないものにしている。
- $\alpha=\alpha_0$ のとき Z と A は独立であると結論してしまうこと。共分散が 0 であっても独立であるとは限らない。
- $\mu_2\sigma_1^2+\mu_1\sigma_2^2\neq 0$ である理由を述べ忘れること。打ち消し合いが起こらないのは、長さが正だからである。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(UV)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$ は共分散(covariance)であり、特別な値 α_0 は $\mathrm{Cov}(P,A)/\mathrm{Var}(A)$、すなわち P の A への最小二乗回帰（least-squares regression）の傾きである。$\alpha=\alpha_0$ と選ぶと残差 Z は A と無相関（uncorrelated）になるが、A と独立にはならない。同

時に正規分布に従う（jointly normal）確率変数では二つの概念は一致し、これが正規分布が非常に扱いやすい理由の一つである。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、共分散・相関・独立性を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。