解答例

STEP III 2006、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2006、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s3-q13

鍵となる考え方

周はまったく性質の異なる二つの部分、すなわち長さ π の弧と長さ 2 の直径からなる。そこで、各点がどちらの部分に落ちるかで条件づける（condition）。三つの場合のいずれでも、三角形の面積は頂点 C を中心にとった $\frac{1}{2}ab\sin C$ という簡単な式で表され、条件付き期待値（conditional expectation）は短い積分で求まる。最後に全期待値の法則（law of total expectation）によって、各部分を組み合わせる。

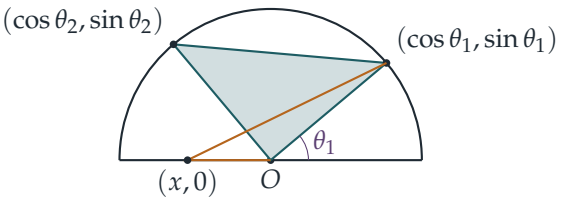
解答

設定

直径の中心 O を原点に置き、直径を x 軸上の $(-1,0)$ から $(1,0)$ までとし、弧は上半平面にあるものとする。「周上に無作為に」とは、全長 $\pi+2$ の境界全体に沿って、長さに関して一様に分布している（uniformly distributed）という意味である。したがって各点は独立に（independently）

- 確率 $\dfrac{\pi}{\pi+2}$ で弧上にあり、そのとき θ を $[0,\pi]$ 上の一様分布として $(\cos\theta,\sin\theta)$ と表される。
- 確率 $\dfrac{2}{\pi+2}$ で直径上にあり、そのとき x を $[-1,1]$ 上の一様分布として $(x,0)$ と表される。

（単位円では弧の長さが角度に等しいので、弧上で長さに関して一様であることは、角度に関して一様であることと同じである。）



二点のうち直径上にあるものの個数を D とする。二点の独立性を用いると、$D = 2$、1、0 となる確率はそれぞれ

$$\frac{4}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{2\cdot 2\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2},$$

である（中央の場合の因子 2 は、どちらの点が直径上にあるかを数えている）。どの場合も三角形は O を頂点にもつので、その面積は $\frac{1}{2}\,|OP|\,|OQ|\sin\angle POQ$ である。

二点とも直径上にある場合

三つの頂点がすべて一直線上にあるので、三角形は退化して（degenerate）おり $A = 0$ である。よって $\mathrm{E}(A \mid D = 2) = 0$ である。

一点が弧上、一点が直径上にある場合

二点を $P = (\cos\theta, \sin\theta)$、$R = (x, 0)$ とする。このとき $|OP| = 1$、$|OR| = |x|$ であり、底辺 OR は直径上にあって、P はその上方の高さ $\sin\theta \geq 0$ の位置にあるから

$$A = \tfrac{1}{2}\,|x|\sin\theta.$$

x と θ は独立なので

$$\mathrm{E}(A \mid D = 1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}|x|\,\mathrm{E}(\sin\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

二点とも弧上にある場合

このとき $P = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$、$Q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ であり、θ_1, θ_2 は独立で $[0, \pi]$ 上の一様分布に従う。二つの半径の長さはともに 1 で、角 POQ は $|\theta_1 - \theta_2|$ であるから

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\sin(\theta_1 - \theta_2)|.$$

考えてみよう $\mathrm{E}|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$ を求めるのに、$\theta_1 - \theta_2$ の分布は必要だろうか？

必要ない。まず θ_2 で条件づければよい。θ_2 を固定すると、θ_1 が $[0, \pi]$ を動くとき、角 $\theta_1 - \theta_2$ は長さ π の区間を動く。関数 $|\sin u|$ は周期 π をもつので、長さ π のどの区間

で積分しても、$[0,\pi]$ での積分と等しい：

$$\int_0^{\pi} |\sin(\theta_1-\theta_2)|\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 2.$$

したがって θ_2 の値によらず $\mathrm{E}\big(|\sin(\theta_1-\theta_2)| \,\big|\, \theta_2\big) = 2/\pi$ であり、ゆえに

$$\mathrm{E}(A \mid D=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

まとめ

全期待値の法則により

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0 + \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

となり、これは求める $(2+\pi)^{-1}$ である。

検算

- 三つの場合の確率の和 $\dfrac{4+4\pi+\pi^2}{(\pi+2)^2}$ は 1 になる。
- 各条件付き期待値は、その場合に取りうる面積の最大値以下である：$\frac{1}{\pi}\approx 0.318 \le \frac{1}{2}$（二つの半径が直角をなすとき）、$\frac{1}{2\pi}\approx 0.159 \le \frac{1}{2}$。
- 10^6 組の点によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では $\mathrm{E}(A)\approx 0.1943$ が得られ、$1/(2+\pi)\approx 0.1945$ とよく一致した。また数値積分（quadrature）により、条件付きの値 $1/\pi$ と $1/(2\pi)$ も確認された。

よくある間違い

- 各点が弧上にあるか直径上にあるかを、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ として選んでしまう。「周上に無作為に」とは、各部分をその長さで重みづけることである。
- $\mathrm{P}(D=1)$ の因子 2 を忘れる。どちらの点が直径上にあってもよい。
- 絶対値をつけずに $A=\frac{1}{2}\sin(\theta_1-\theta_2)$ と書いてしまう。こうすると対称性により期待値が 0 になる。

STEP のその先へ

これは**幾何確率**（geometric probability）の小さな一例であり、その古典的な例にはビュフォン（Buffon）の針やベルトラン（Bertrand）の逆説がある。ベルトランの逆説は、「無作為に」という言葉をなぜきちんと定めなければならないかを示しており、ここではまさに周に沿った長さを測度とすることでそれを行った。ここで活躍した道具、すなわち分割で条件づけて平均をとること（全期待値の法則）は、大学 1 年次の確率論の中心にある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これをよく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。