解答例

STEP III 2006、第 12 問

確率・統計 ・ 正規近似と期待値

> **STEP III 2006、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q12

鍵となる考え方

追加のバスの価値は、平均して稼ぐ額にとどまる。したがって、会社が検討すべき免許料は、1 年あたりの追加利益の**期待値**（expected value）以下である。既存のバスだけで足りる日には追加のバスは何も稼がず、また座席数 32 を超えて乗客を運ぶこともできない。そこで、「切り詰められた」確率変数（random variable）の期待値が必要となる。数値は、正規近似（normal approximation）のもとで、従来の輸送能力と新しい輸送能力がちょうど分布のきりのよい点に来るように選ばれている。

解答

モデルの設定

1 回の到着において、1024 人の観光客のうちバスターミナルへ案内される人数を X とする。各観光客はそこへ確率 $\frac{1}{2}$ で向かい、観光客どうしは互いに独立（independent）に案内されると仮定する。このとき

$$X \sim \mathrm{B}(1024, \tfrac{1}{2}), \qquad \mathrm{E}(X) = 512, \qquad \mathrm{Var}(X) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256.$$

n が大きく $p = \frac{1}{2}$ であるから、正規近似 $X \approx \mathrm{N}(512, 16^2)$ を用い、$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ として $X = 512 + 16Z$ と書く。指示に従い、連続性補正（continuity correction）は行わない。

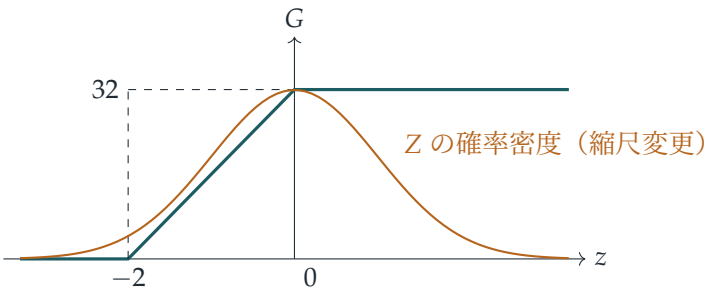
15 台のバスは $15 \times 32 = 480$ 人の乗客を運べるので、1 回の到着における現在の利益は $£\min(X, 480)$ である。16 台目のバスを加えると輸送能力は 512 となり、利益は

£ $\min(X, 512)$ となる。したがって、1 回の到着における追加利益は

$$G = \min(X,512) - \min(X,480) = \begin{cases} 0, & X \le 480, \\ X - 480, & 480 \le X \le 512, \\ 32, & X \ge 512. \end{cases}$$

である。Z で表すと、2 つの折れ点は $X = 480 \iff Z = -2$ と $X = 512 \iff Z = 0$ であり、中間の範囲では $X - 480 = 32 + 16Z$ である。よって

$$G = \begin{cases} 0, & Z \le -2, \\ 32 + 16Z, & -2 \le Z \le 0, \\ 32, & Z \ge 0. \end{cases}$$



追加利益の期待値

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ を標準正規分布の確率密度関数（probability density function）とする。期待値を 3 つの範囲に分けると

$$\mathrm{E}(G) = 32\,\mathrm{P}(Z \ge 0) + \int_{-2}^{0} (32 + 16z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

第 1 項は $32 \times \frac{1}{2} = 16$ である。積分のうち定数部分は、対称性 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$ を用いて

$$32 \int_{-2}^{0} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 32(\Phi(0) - \Phi(-2)) = 32(\tfrac{1}{2} - (1 - \Phi(2))) = 32\Phi(2) - 16,$$

となる。

考えてみよう 数表を使わずに $z\,\phi(z)$ を積分するにはどうすればよいか。

確率密度関数を微分すると $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$ である。よって $z\,\phi(z)$ は厳密な原始関数（antiderivative）$-\phi(z)$ をもち、

$$16 \int_{-2}^{0} z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = 16[-\phi(z)]_{-2}^{0} = -16(\phi(0) - \phi(2)) = -\frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2}).$$

（これは負であり、そうあるべきである。範囲全体で $z < 0$ だからである。）

3 つの部分を足し合わせると、16 が打ち消し合う：

$$\mathrm{E}(G) = 16 + (32\Phi(2) - 16) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - \mathrm{e}^{-2}) = 32\Phi(2) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}(1 - \mathrm{e}^{-2}).$$

免許料

1 年に 50 回の到着があるので、期待値の線形性（linearity of expectation）により、16 台目のバスによる 1 年あたりの追加利益の期待値は

$$50\,\mathrm{E}(G) = 1600\,\Phi(2) - \frac{800}{\sqrt{2\pi}}(1 - \mathrm{e}^{-2}) \text{ ポンド}.$$

である。これより大きな免許料を支払えば会社は平均して損失を被り、これより小さな免許料であれば期待値の意味で利益が残る。したがって、これが（正規近似を用いているので近似的に）検討に値する年間免許料の最大値であり、求める結果である。数値ではおよそ £1288 である。

検算

- 妥当な範囲の確認：追加のバスは 1 回の運行あたり 0 から 32 の間を稼ぐので、年間の値は 0 と 1600 の間になければならない。得られた値 $1600 \times 0.97725 - 319.15 \times 0.86466 \approx 1287.6$ は確かにこの範囲にある。
- 厳密な計算：$\min(k, 512) - \min(k, 480)$ を厳密な $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ の確率で重み付けして足し合わせ、50 倍すると 1287.69 となり、正規近似の値 1287.64 と 6 ペンス以内で一致する。

よくある間違い

- 追加利益を $32\,\mathrm{P}(X > 480)$ としてしまうこと。これは、新しいバスが必要なときには常に満席になるとみなしていることになる。バスの乗客が 480 人から 512 人の間の日には、新しいバスは一部しか埋まらない。
- $\int_{-2}^{0} z\phi(z)\,\mathrm{d}z$ における符号の誤り。被積分関数が負なので、答えは負でなければならない。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}\big(\min(X,c)\big)$ は在庫 c をもつ新聞売り子の期待販売数であり、c を選ぶ「新聞売り子問題」（newsvendor problem）はオペレーションズ・リサーチ（operations research）の古典的な問題である。同じ切り詰められた利得 $\min(\max(X-a,0),b-a)$ は、金融数学では「コール・スプレッド」（call spread）と呼ばれる。$\phi'(z)=-z\phi(z)$ という技法は、切断正規分布（truncated normal distribution）のモーメントの理論の出発点である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、二項分布の正規近似や、確率変数の関数の期待値を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。