解答例

STEP III 2006、第 11 問

力学 ・ 連結された系における衝突

> **STEP III 2006、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q11

鍵となる考え方

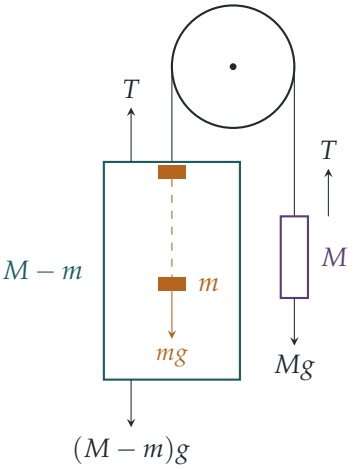
タイルが外れると、エレベーター（lift）は釣り合いおもり（counterweight）より軽くなるので、タイルが落下する間にエレベーターは上昇し始める。したがってタイルは、**エレベーターに対して**高さ h を進まなければならない。衝突については、エレベーターと釣り合いおもりを、床を通してタイルとつながった質量 $2M - m$ の一つの物体とみなす。ケーブルの撃力（impulse）に関して与えられた条件こそが、この物体とタイルについて運動量型の保存則を書くことを可能にするのである。この「運動量」は衝突の直前に 0 になることがわかり、そのおかげでエネルギーの収支が非常にすっきりする。

解答

エレベーター、釣り合いおもり、タイルを（鉛直方向の運動について）質点（particle）とみなし、ケーブルは軽く伸びない（inextensible）もの、滑車（pulley）はなめらかなものとしてモデル化する。タイルが外れる前、系は静止しているので、タイルを**含めた**エレベーターが釣り合いおもりと釣り合っている。すなわち、エレベーターの質量はタイル込みで M、タイルなしで $M - m$ である。

落下

エレベーターとタイルについては上向きを正とする。ケーブルは伸びないので、エレベーターが速さ u、加速度 a で上に動くとき、釣り合いおもりは同じ速さと加速度で下に動く。張力（tension）を T とする。



エレベーター（上向き）と釣り合いおもり（下向き）にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（second law）を適用すると

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

を得る。辺々を加えると $(2M-m)a = mg$ となるので

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

である。タイルは下向きの加速度 g で自由落下（free fall）する（ガイドはなめらかで、ほかに何も触れていない）。したがってエレベーターに対して、タイルは下向きに

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

の加速度をもち、エレベーターに対して静止した状態から動き始める。時間 t の後に床に達するとすると $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$ であるから

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

となる。その瞬間のタイルの速さは

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

であり、これが示すべきことであった。このときエレベーター（と釣り合いおもり）の速さは

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

である。この間にエレベーターは $\frac{1}{2}at^2 = \frac{mh}{2M} < h$ だけ上昇するので、滑車までの距離に関する条件により、エレベーターが先に滑車に達することはない。

衝突

床がタイルに及ぼす撃力（上向き）を J とし、ケーブルの張力による撃力を I とする。与えられた条件により、I はエレベーターと釣り合いおもりに対して同じ大きさをもつ（どちらにも上向きにはたらく）。瞬間的な衝突の間、重力は撃力を与えない。衝突直後のタイルの速度を w（上向き）、エレベーターの速度を U'（上向き）とすると、釣り合いおもりの下向きの速度も U' である。このとき

$$\begin{aligned} \text{タイル:} \quad & m\big(w-(-v)\big) = J, \\ \text{エレベーター:} \quad & (M-m)(U'-U) = I-J, \\ \text{釣り合いおもり（下向き）:} \quad & M(U'-U) = -I. \end{aligned}$$

が成り立つ。3 式をすべて加えると J と I が消去されて

$$mw + (2M-m)U' = -mv + (2M-m)U.$$

となる。

考えてみよう 「下向き」を正とする釣り合いおもりの式を、ほかの式に加えてよいのはなぜか？

ケーブルがあるので、「釣り合いおもりが下がる」ことと「エレベーターが上がる」ことは同じ座標で表される。ここで示したのは、組み合わせ $mw + (2M-m)U'$（タイルの上向きの運動量（momentum）に、ケーブルに沿って測ったエレベーターと釣り合いおもりの運動量を加えたもの）が衝突によって変わらないということである。撃力が等しいという条件はここで使われる。この条件がなければ I は打ち消し合わない。

ここで鍵となる観察をする。$U = \dfrac{mv}{2M-m}$ であるから、右辺は $-mv + mv = 0$ である。よって

$$mw + (2M-m)U' = 0 = -mv + (2M-m)U.$$

床におけるニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$w - U' = e\big(U-(-v)\big) = e(U+v).$$

衝突前と衝突後の速度はどちらも同じ「運動量ゼロ」の式を満たすので、組 (w, U') と $(-v, U)$ はいずれも $(2M-m, -m)$ の定数倍である。反発の式によってその倍率が決まり、$w = ev$、$U' = -eU$ となる。（検算：$mev - (2M-m)eU = e(mv - mv) = 0$ であり、$w - U' = e(v+U)$ である。）

エネルギーの損失

衝突の直前、運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2M-m)U^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{m}{2M-m}\right) = \frac{Mmv^2}{2M-m} = mgh,$$

である。ここで $U = \frac{mv}{2M-m}$、続いて $v^2 = \frac{(2M-m)gh}{M}$ を用いた。衝突の直後には、すべての速度が $\pm e$ 倍されているので、運動エネルギーは $e^2\,mgh$ である。衝突は瞬間的なので、その間に位置エネルギー（potential energy）は変化せず、系のエネルギーの損失は

$$mgh - e^2 mgh = mgh(1-e^2),$$

となり、これが示すべきことであった。

コメント

答えは M にまったく依存しない。これは、**固定された**エレベーターの中でタイルが高さ h を落下し、反発係数（coefficient of restitution）e で跳ね返った場合の損失とちょうど同じである。これは納得のいく結果である。衝突の直前、系の運動エネルギーは mgh であり、これは単に解放された位置エネルギーにほかならない（タイルとエレベーターは h の隙間を詰め、エレベーターの上昇は釣り合いおもりの下降とちょうど釣り合う）。さらに、ケーブルに沿った「運動量」がゼロなので、この衝突は運動量ゼロの座標系（zero-momentum frame）から見た衝突のようにふるまい、その座標系では常に運動エネルギーの $1-e^2$ の割合が失われる。特に、$e=0$ ならば運動エネルギーはすべて失われて系全体が静止し、$e=1$ ならば何も失われない。

検算

- $M=5$、$m=2$、$h=3$、$g=10$、$e=\frac{1}{3}$ とする。このとき $v^2=48$、$U^2=3$ であり、衝突前の運動エネルギーは $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 48 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 60 = mgh$、損失は $60\cdot\frac{8}{9} = \frac{160}{3}$ である。
- M、m、h、e をランダムに 200 通り選び、運動を数値的に追跡する（タイルは自由落下、エレベーターは $\frac{mg}{2M-m}$ で上向きに加速）と、衝突の速さ v、エレベーターの速さ U、損失 $mgh(1-e^2)$ が再現される。
- $m \to 0$ のとき、エレベーターはほとんど動かず $v \to \sqrt{2gh}$ となり、当然ながら自由落下の速さに一致する。
- 張力による撃力 $I = M(U-U') = M(1+e)U$ は正なので、衝突の間ケーブルはたるまない。

よくある間違い

- タイルが落ちた後もエレベーターの質量を M として扱うこと。そうすると何も加速せず、タイルの速さは $\sqrt{2gh}$ になってしまう。
- 床がタイルを迎えに上がってくるので、地面に対するタイルの落下距離が h より小さいことを忘れること。
- タイルとエレベーターだけに運動量保存則を適用し、ケーブルを通してエレベーターとつながっている釣り合いおもりを忘れること。

STEP のその先へ

衝突において保存される量は通常の運動量ではなく、ケーブルの位置を表す一つの座標に共役な運動量である。これは一般化座標（generalised coordinates）とラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）への最初の入り口である。全運動量がゼロの衝突ではちょうど $1 - e^2$ の割合の運動エネルギーが失われるという事実は、衝突理論全体を貫く重心系（centre-of-mass frame）の考え方である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心系における運動量と、連結された物体の系の両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。