解答例

STEP III 2006、第 10 問

力学 ・ 角運動量保存則

> **STEP III 2006、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q10

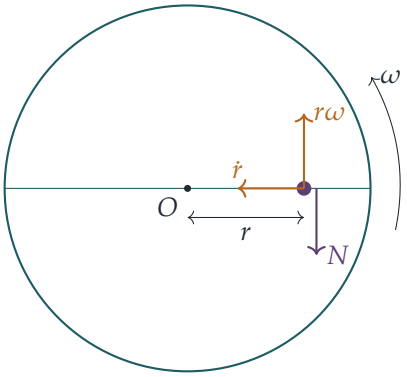
鍵となる考え方

円板と粒子からなる系には、軸のまわりに回転させるような外力は何も作用せず、なめらかな溝は全体として仕事をしない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という二つの保存則（conservation law）が成り立つ。これらにより ω と $\dot{r}$ が r だけの関数として表され、V、Ω、a、k を結ぶ一見奇妙な条件は、エネルギーの式をきれいにまとめるために置かれている。$\dot{r}$ を $\dot{\theta} = \omega$ で割ると時間が消え、軌道についての変数分離形（separable）の方程式が残る。

解答

モデル化

粒子は質量 m の質点（point mass）とみなし、溝はなめらかであるとする。すると粒子にはたらく水平方向の力は、溝に垂直な抗力（reaction）N だけである。円板は固定された鉛直な軸のまわりを自由に回転するので、軸受けは軸のまわりにトルク（torque）を及ぼさない。重力と鉛直方向の抗力はいずれも鉛直であり、関与しない。円板が回転した角を θ とすると $\omega = \dot{\theta}$ であり、粒子の軸からの距離を r とする。粒子は溝の中にとどまるので、その速度は溝に沿った成分 $\dot{r}$ と、溝に垂直な成分 $r\omega$ をもつ。



角速度

抗力 N は粒子に、$-N$ は円板に同じ点で作用するので、軸のまわりのそれらのモーメントは打ち消し合う。軸のまわりの外部トルクがないので、軸のまわりの全角運動量は一定である。円板の寄与は $mk^2\omega$ であり、粒子の寄与は $mr\cdot r\omega = mr^2\omega$ である（モーメントをもつのは速度の横方向成分だけである）。$t=0$ における全角運動量は $m(k^2+a^2)\Omega$ であるから、

$$(k^2+r^2)\,\omega = (k^2+a^2)\,\Omega, \qquad \text{すなわち} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2},$$

となり、これが第一の結果である。

動径方向の速さ

考えてみよう 粒子が動いている間、溝は粒子を横から押している。それなのに、なぜエネルギーは保存されるのか。

抗力 N は溝に垂直である。粒子と、それに接している円板上の点とは、溝に垂直な速度成分がともに $r\omega$ で等しい。両者の違いは溝に沿った滑りの速度 $\dot r$ だけであり、これは N に垂直である。よって N が粒子にする仕事は、$-N$ が円板にする仕事とちょうど打ち消し合う。軸の軸受けは仕事をしないので、全運動エネルギーは一定である。

共通因数 $\frac{1}{2}m$ を約すと、エネルギー保存則から

$$k^2\omega^2 + \dot r^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

を得る。ここで右辺に与えられた条件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ を用いると、

$$(k^2+a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2a^2(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)(k^2+a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2}.$$

となる。左辺については、第一の結果より $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$ であ

る。したがって

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

軌道の方程式

粒子が軸に向かって動いている間は $\dot{r}<0$ であるから、負の平方根をとって

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

である。$\omega=\dot{\theta}>0$ であるから、連鎖律（chain rule）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$ を用いることができ、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

となる。よって $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$ であり、求める式が得られた。

r を求める

$u=k/r$ とおくと $u>0$ である。このとき

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

これは変数分離できて、

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

となる。ここで α はある定数である。よって $k/r=\sinh(\theta+\alpha)$、すなわち

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

である。$t=0$ では $\theta=0$ かつ $r=a$ であるから $\sinh\alpha = k/a$ となり、求める結果が得られた。

粒子は決して軸に到達しない

> **考えてみよう** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ は決して 0 にならないが、θ が有限の時間で無限大になることはありうるだろうか。

ありえない。$r^2 \geq 0$ であるから、第一の結果より $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$ であり、したがって $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ は任意の有限の時刻 t において有限である。ゆえに、どの時刻においても $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$ である。

公式が成り立ち続けること、すなわち粒子が軸に向かって動き続けることも確認しておく必要がある。$\dot{r}^2$ の式より、$\dot{r}$ が 0 になりうるのは $r = 0$ のときだけである。よって $r > 0$ である間は $\dot{r}$ は最初の負の符号を保ち、上の議論はすべての $t > 0$ に対して適用できる。粒子は渦を巻きながら軸にどこまでも近づき、$r \to 0$ となるのは $\theta \to \infty$ のときに限られるが、決して軸には到達しない。

検算

- $r = a$ のとき、$\dot{r}^2$ の式は $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$ を与え、初期条件と一致する。
- $k = a = \Omega = 1$（したがって $V = \sqrt{2}$）として、運動方程式 $\ddot{r} = r\omega^2$ および $(k^2+r^2)\omega =$ 一定を数値的に積分した。円板が $\theta \approx 4.4170$ だけ回転したところで粒子は $r = 0.01$ に達し、$\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$ と一致する。計算の全過程を通して、エネルギー、$\dot{r}^2$、$r\sinh(\theta+\alpha) = k$ はいずれも約 10^{-11} の精度で成り立っていた。

よくある間違い

- 粒子自身の角運動量 $mr^2\omega$、あるいはその横方向の運動エネルギー $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ を忘れる。
- $\dot{r}$ に正の平方根をとってしまい、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の符号を誤る。
- θ が有限の時刻では有限にとどまることに触れずに、$r \neq 0$ だけから「決して軸に到達しない」と結論する。

STEP のその先へ

粒子には動径方向の力が何もはたらかないのに、円板とともに回転する回転座標系（rotating frame）から見ると、外側へ押し出されているように見える。それが

$\ddot{r} = r\omega^2$ における遠心力（centrifugal force）の項であり、横からの抗力 N はコリオリ力（Coriolis force）とつり合っている。大学の力学では、このような問題をラグランジュ（Lagrange）の方法（Lagrangian methods）で扱う。角 θ はエネルギーの式に現れないので、それに共役な運動量（conjugate momentum）、ここでは角運動量が自動的に保存される。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、回転座標系と角運動量をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。