解答例

STEP III 2006、第 1 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 2006、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q1

鍵となる考え方

まず割り算を行う。曲線を直線と小さな補正項の和として書けば、斜めの漸近線（oblique asymptote）が得られ、曲線がその漸近線のどちら側にあるかがわかり、さらに導関数（derivative）も計算しやすくなる。導関数はいたるところで 2 より大きいことがわかり、この一つの事実が解の個数を数える各小問の大部分を片づけてくれる。各方程式は「曲線 = 簡単なもの」の形に変形でき、あとは傾きを比べればよい。

解答

曲線

$2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$ であるから、

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

ここからただちに読み取れる性質がいくつかある。

- y は**奇関数**（odd function）であるから、曲線は原点のまわりに 2 回の回転対称性（rotational symmetry）をもつ。
- 曲線は $x = 0$ および $x = \pm\sqrt{5}$ で x 軸と交わる。
- **漸近線**。分母は $x = \pm 2$ で 0 になる（そこでの分子は $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$）から、$x = 2$ と $x = -2$ は鉛直漸近線（vertical asymptote）である。$|x| \to \infty$ のとき補正項は $2x/(x^2-4) \to 0$ となるから、$y = 2x$ は斜めの漸近線である。
- **漸近線のどちら側にあるか**。$y - 2x = -2x/(x^2-4)$ である。$x > 2$ ではこれは負

である（曲線は $y = 2x$ のすぐ下にある）。$x < -2$ では正である（すぐ上にある）。$0 < x < 2$ では正、$-2 < x < 0$ では負である。

- **$x = \pm 2$ の近くでの振る舞い**。$x \to 2^+$ のとき $-2x/(x^2-4) \to -\infty$ であり、$x \to 2^-$ のとき $+\infty$ に発散する。奇関数であることから、$x \to -2^-$ のとき $y \to +\infty$、$x \to -2^+$ のとき $y \to -\infty$ である。

割り算した形を微分すると、

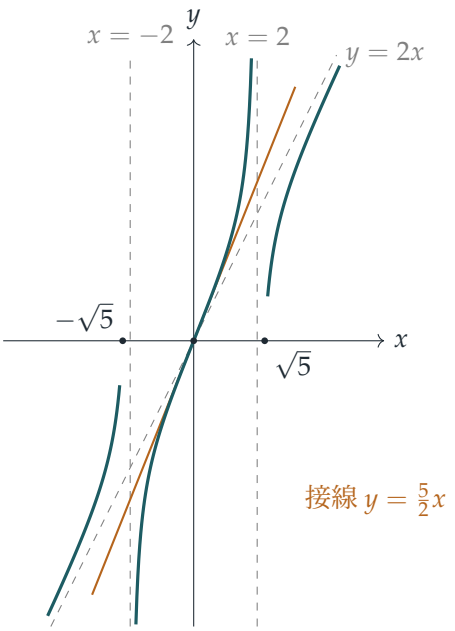
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

したがって、$x \neq \pm 2$ であるすべての x について $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$ である。よって停留点（stationary point）は存在せず、3 つの区間 $x < -2$、$-2 < x < 2$、$x > 2$ のそれぞれにおいて曲線は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$-\infty$ から $+\infty$ まで増加する。

原点における接線。$x = 0$ における傾きは $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$ であるから、接線は $y = \frac{5}{2}x$ である。もう一度微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

となり、これは $x = 0$ でのみ 0 になり、そこで符号を変える。すなわち原点は変曲点（point of inflection）である。$0 < x < 2$ では第 2 次導関数は正である（分子も分母も負）から、中央の枝はそこで下に凸（convex）であり、接線 $y = \frac{5}{2}x$ の**上側**にある。$-2 < x < 0$ では上に凸（concave）であり、接線の下側にある。



まとめ。漸近線は $x=2$、$x=-2$ および $y=2x$ であり、原点における接線は $y=\frac{5}{2}x$ である。

以下の各小問では、$x=\pm 2$ は決して解にならない（そこでは左辺が 0 でなく、右辺が 0 である）。したがって x^2-4 で割ってよく、曲線と別のグラフとの交点の個数を数えればよい。

小問 (i)

$\frac{3}{2}(x^2-4)$ で割ると、方程式は

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4}=\frac{2}{3}(x+3)$$

となる。よって、曲線と傾き $\frac{2}{3}$ の直線 $y=\frac{2}{3}x+2$ との交点を求めればよい。

> **考えてみよう** 傾きが 2 より小さい直線が各枝とちょうど 1 回ずつ交わるのはなぜか。

曲線の y から直線の y を引いたものを $h(x)$ とおく。各枝の上で $h'(x)>2-\frac{2}{3}>0$ であるから、h は狭義単調増加であり、零点は高々 1 つである。鉛直漸近線側の端では、y と同様に $h\to\pm\infty$ となる（直線の値は有限にとどまる）。外側の端では $h\approx 2x-\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}x$ であり、これは $x\to-\infty$ のとき $-\infty$ に、$x\to+\infty$ のとき $+\infty$ に発散する。よって 3 つの枝のそれぞれにおいて h は $-\infty$ から $+\infty$ まで動き、中間値の定理（intermediate value theorem）により、ちょうど 1 回だけ 0 になる。

したがって、方程式 (i) は **3 つ**の実数解をもつ。（実際、これは 3 次方程式 $2x^3-3x^2-11x+12=0$ であり、$x=1$ がその解の一つである。）

小問 (ii)

$2(x^2-4)$ で割ると、$y=\frac{5}{2}x-1$ との交点を求めればよいことになる。これは原点における接線を 1 だけ下に平行移動したものである。今度は傾きが 2 を超えるので、(i) の議論はもはや使えず、枝ごとに調べる。

- $x>2$：曲線は $y=2x$ の下側にある。一方、直線は $\frac{5}{2}x-1-2x=\frac{1}{2}x-1>0$ を満たすから、$y=2x$ の上側にある。交点はない。
- $x<-2$：曲線は $y=2x$ の上側にあり、直線は $\frac{1}{2}x-1<0$ よりその下側にある。交点はない。
- $0\le x<2$：曲線は（下に凸であることから）接線 $y=\frac{5}{2}x$ 上またはその上側にあり、接線は直線より上にある。交点はない。

- $-2 < x < 0$：$x \to -2^+$ のとき曲線は $-\infty$ に発散し、直線は -6 に近づく。$x = 0$ では曲線の値は 0 で、直線の値 -1 より上にある。よって少なくとも 1 回は交わる。ここでは $y'' < 0$ であるから y' は $(-2, 0)$ 上で減少し、$y' > y'(0) = \frac{5}{2}$ となる。したがって「曲線から直線を引いた差」は狭義単調増加であり、交点はただ一つである。

したがって、方程式 (ii) は -2 と 0 の間にある**ただ 1 つ**の実数解をもつ。（3 次方程式としては $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$ であり、その極値 8 と $\frac{184}{27}$ がともに正であることから、実数解がただ 1 つであることが確かめられる。その解は $x \approx -1.51$ 付近にある。）

小問 (iii)

$(x^2 - 4)^2$ で割ると

$$\left(\frac{2x(x^2 - 5)}{x^2 - 4}\right)^2 = x^2 + 1$$

となる。よって、曲線と直角双曲線（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ との交点、すなわち $y = \sqrt{x^2 + 1}$（上の枝）または $y = -\sqrt{x^2 + 1}$（下の枝）との交点を求めればよい。

> **考えてみよう** 対称性を使って手間を半分にできないか。

できる。写像 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ は曲線をそれ自身に移し（奇関数だから）、双曲線の 2 つの枝を入れ替える。よって下の枝との交点は上の枝との交点と 1 対 1 に対応し、後者だけを数えればよい。

$u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ とおく。すると $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2 + 1} < 1$ であるから、差 $y - u$ の導関数は曲線の各枝の上で $2 - 1 = 1 > 0$ より大きく、各枝からは高々 1 つの交点しか得られない。次に端の様子を調べる。

- $-2 < x < 2$：$y - u$ は $-\infty$ から $+\infty$ まで動く。解は 1 つ。
- $x > 2$：$x \to 2^+$ のとき $y - u \to -\infty$ であり、$x \to \infty$ のとき $y - u \approx 2x - x \to +\infty$ である。解は 1 つ。
- $x < -2$：$x \to -\infty$ のとき $y - u \approx 2x - |x| = 3x \to -\infty$ であり、$x \to -2^-$ のとき $y - u \to +\infty$ である。解は 1 つ。

よって、曲線は上の枝と 3 回交わり、対称性により下の枝とも 3 回交わる。2 つの枝には共有点がない（$u \geq 1$）から、これら 6 つの点の x 座標はすべて異なり、方程式 (iii) は **6 つ**の実数解をもつ。これは 6 次の多項式方程式（すなわち $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$）であるから、その解はすべて実数である。

検算

- $x = 0$ の近くでは $y \approx 2x(-5)/(-4) = \frac{5}{2}x$ であり、接線と一致する。
- $x = 1000$ では $y - 2x \approx -0.002$ である。予想どおり、小さな負の値である。
- もとの方程式について符号の変化を数値的に探索すると、(i) では解 $x \approx -2.212,\ 1,\ 2.713$、(ii) では $x \approx -1.510$ のみ、(iii) では $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$ が見つかる。

よくある間違い

- $x^2 - 4$ で割る前に、$x = \pm 2$ が解でないことの確認を忘れる。
- (iii) で、$y = \sqrt{x^2 + 1}$ との交点だけを数え、負の平方根を見落とす。
- (ii) で、(i) と同じように「傾きの急な直線だから各枝に解が 1 つずつ」と思い込む。傾きが 2 を超える場合、外側の枝には別の議論が必要である。

STEP のその先へ

ここでの解の個数の数え方は、中間値の定理と単調性（monotonicity）を組み合わせたものである。すなわち、$-\infty$ から $+\infty$ まで動く連続な狭義単調増加関数は、ちょうど 1 つの零点をもつ。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、これらの事実はどちらも実数の完備性（completeness）から丁寧に証明され、同じ論法が「奇数次の実係数多項式は実数解をもつ」といった結果の土台となっている。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この内容を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。