解答例

STEP II 2006、第 9 問

力学 ・ 摩擦と転倒

STEP II 2006、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

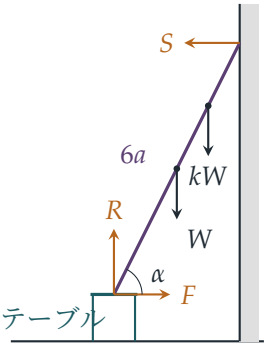
step.maths.org/questions/06-s2-q9

鍵となる考え方

はしごとテーブルを、はしごの下端での接触によって結ばれた二つの別々の物体として扱う。はしごだけを考えると、その下端での垂直抗力と摩擦力が求まり、これらはペンキ職人がどの高さにいるかによって変わる。次にニュートン（Newton）の第三法則により、同じ大きさで向きが逆の力がテーブルに働く。テーブルについては二つのしきい値を比べる。すなわち、テーブルを滑らせる押す力と、遠い側の脚のまわりのモーメントが、テーブルにかかる重さのモーメントを上回るような押す力である。

解答

はしごを一様な棒（uniform rod）、ペンキ職人を質点（particle）、壁をなめらか（smooth）とし、テーブルを天板の高さが a の剛体（rigid body）とみなす（天板の厚さは無視する）。$\alpha = \arctan 2$ とおくと、$\tan\alpha = 2$、$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$、$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である。ペンキ職人ははしごの下端からはしごに沿って距離 x の位置に立つとし、$0 \le x \le 6a$ とする。



小問 (i)

はしごに働く力は、中点に働く自身の重さ W、ペンキ職人の重さ kW、なめらかな壁からの水平な抗力 S、そして下端に働く上向きの垂直抗力（normal reaction）R と壁に向かう向きの摩擦力（friction）F である。（摩擦力は壁に向かう向きでなければならない。S とつり合うことのできる水平な力はこれだけだからである。）

鉛直方向と水平方向の力のつり合いより

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

はしごの下端のまわりのモーメント（moment）を考える。上端は下端より $6a\sin\alpha$ だけ高く、二つの重さはそれぞれ水平距離 $3a\cos\alpha$ と $x\cos\alpha$ の位置に働くので、

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

両辺を $6a\sin\alpha$ で割り、$\cot\alpha = \frac{1}{2}$ を用いると

$$F = S = \frac{W}{12}\Big(3 + \frac{kx}{a}\Big).$$

これは x について増加するので、必要な摩擦力が最大になるのはペンキ職人が一番上、すなわち $x = 6a$ にいるときである：

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

得られる摩擦力の最大値は

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

$2k+1 < 2k+2$ であるから、ペンキ職人のどの位置についても、またどの k についても $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$ が成り立つ。したがって、テーブルが固定されていれば、ペンキ職人がどれほど高く立ってもはしごは決して滑らない。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

ここでは $k = 9$ なので $R = 10W$ であり、

$$F = \frac{W}{4}\Big(1 + \frac{3x}{a}\Big),$$

これは $x = 0$ での $\frac{1}{4}W$ から $x = 6a$ での $\frac{19}{4}W$ まで増加する。小問 (i) の結果はそのまま成り立つので、はしごがテーブルの天板の上で滑ることはない。

ニュートンの第三法則により、はしごはテーブルの天板の中心を、下向きの力 $R = 10W$ と、壁から離れる向きの水平な力 F で押す。テーブルにはさらに自身の重さ $2W$ が中心に働き、地面は脚に垂直抗力と摩擦力を及ぼす。

考えてみよう 天板の中心を水平に押す力によって、どうしてテーブルが傾くのだろうか。

押す力 F は高さ a に働くので、壁から遠い側の 2 本の脚の下端のまわりにモーメントをもつ。テーブルが傾くとすれば、それはこれらの脚の先端を結ぶ直線のまわりに回転する。脚は一辺 $\frac{1}{2}a$ の正方形の頂点にあるので、この直線はテーブルの中心から水平距離 $\frac{1}{4}a$ のところにある。

傾く場合。遠い側の脚の先端を結ぶ直線のまわりでは、地面が遠い側の脚に及ぼす力はモーメントをもたず、どの脚に働く地面の摩擦力もモーメントをもたない（地面の高さに働くからである）。中心に働く下向きの力 $10W + 2W = 12W$ は、復元モーメント $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$ をもつ。押す力 F は転倒モーメント Fa をもつ。この直線のまわりのモーメントを考えると、壁に近い側の 2 本の脚に働く垂直抗力（の合計）N_1 は

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

を満たすので、$N_1 \geq 0$ となるのはちょうど $F \leq 3W$ のときである。テーブルが傾き始めるのは $N_1 = 0$ のとき、すなわち

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

のときである。

滑る場合。テーブルについて鉛直方向の力のつり合いを考えると、地面からの垂直抗力の合計は $12W$ なので、得られる摩擦力の合計の最大値は $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$ である。水平方向の力のつり合いより、必要な摩擦力は F である。よって、テーブルが滑り始めるのは

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

のときである。

どちらの値もはしごの長さ $6a$ の範囲内にあり、F はペンキ職人が登るにつれて単調に増加する。F は $4W$ に達する（$x = 5a$）前に $3W$ に達する（$x = \frac{11}{3}a$）。したがって**テーブルが先に傾く**。これが起こるのは、ペンキ職人がはしごに沿って $\frac{11}{3}a$ の位置、すなわち天板から高さ $\frac{11}{3}a\sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$ のところにいるときである。その瞬間に地面で必要な摩擦力はわずか $3W$ であり、得られる最大値 $4W$ より小さいので、テーブルは滑っていない。

検算

- はしごにペンキ職人がいないとき（$x = 0$）、$F = \frac{1}{4}W$ であり、近い側の脚は $N_1 = \frac{11}{2}W$、遠い側の脚は $\frac{13}{2}W$ を支える。押す力が壁から離れる向きなので、遠い

側の脚がわずかに多くを支えるのは当然である。

- コンピュータで多くの k と x の値について力を計算した。(i) では、必要な摩擦力と得られる摩擦力の比の最大値は 1 をわずかに下回る（上端でのその値は $\frac{2k+1}{2k+2}$ である）。(ii) では、近い側の脚の垂直抗力が $x \approx 3.667a$ で 0 になり、地面の摩擦力が $x = 5a$ で限界に達することが確かめられる。

よくある間違い

- 傾きの回転軸を、中心から距離 $\frac{1}{2}a$ にあるテーブルの端にとってしまう。天板の一辺が $\frac{1}{2}a$ なので、半分の幅は $\frac{1}{4}a$ である。
- テーブルを押す力が地面の高さではなく、脚の上端である高さ a に働くことを忘れる。押す力に転倒モーメントを与えるのはこの高さである。
- テーブルに働く地面からの垂直抗力を求めるときに、はしごとペンキ職人の $10W$ を入れ忘れる。テーブル自身の重さ $2W$ だけでは足りない。

STEP のその先へ

この問題は、剛体の系が、滑るか倒れるかという競合する仕方でどのように破綻しうるかを扱っている。その方法は、それぞれのしきい値を求め、荷重がどちらに先に達するかを調べることである。技術者は同じ考え方を擁壁、クレーン、積み重ねた荷物に適用しており、静力学（statics）の講義ではこれが仮想仕事の原理（principle of virtual work）へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体のつり合いと摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。