解答例

STEP II 2006、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと直線

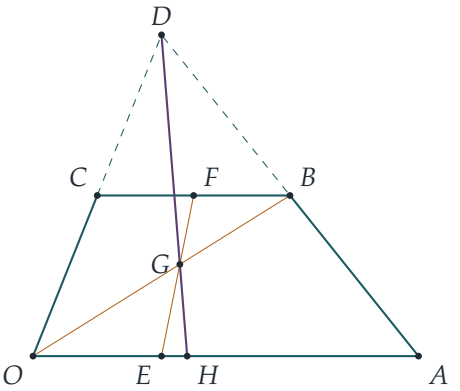
STEP II 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q8

鍵となる考え方

この問題に現れる点はすべて 2 直線の交点として定義されているので、問題全体は一つの決まった手順で進む。すなわち、各直線を最初の小問で求めた形に書き、二つの式を等しいとおいて、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ の係数を比較する（comparing coefficients）。この比較が正当なのは、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ が平行（parallel）でないため、ベクトルを $p\mathbf{a} + q\mathbf{c}$ の形に表す方法がただ一通りしかないからである。



解答

直線の方程式

位置ベクトル（position vector）が $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ である 2 点を通る直線は、$\mathbf{x}$ を通り方向 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ をもつので、その上の点は

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y},$$

で与えられる。ここで α はすべての実数を動く。$\alpha = 0$ のとき $\mathbf{x}$、$\alpha = 1$ のとき $\mathbf{y}$ となり、係数の和はつねに 1 であることに注意する。これが求める形である。

以下を通じて、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ は平行でない（もし平行なら O, A, C が同一直線上（collinear）にあり、台形（trapezium）ができない）。したがって、$p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$ ならば $p = p'$ かつ $q = q'$ である。

小問 (i)

CB は OA に平行なので、ベクトル $\overrightarrow{CB}$ は $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ のスカラー倍（scalar multiple）である。これを $\lambda\mathbf{a}$ とおく。すると

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

$OABC$ を順にたどると、$\overrightarrow{CB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と同じ向きを向くので $\lambda > 0$ であり、また $CB < OA$ より $\lambda < 1$ である。よって $0 < \lambda < 1$ であり、とくに $\lambda \neq 1$ である。このことは後で必要になる。

小問 (ii)

E と F。これらは比からただちに得られる。

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D。直線 OC 上の点は $\mu\mathbf{c}$ である。直線 AB 上の点は

$$(1-\beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1 - \beta + \beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

である。D においてこれらは一致する。係数を比較すると $\beta = \mu$ かつ $1 - \beta(1-\lambda) = 0$ となるので、$\beta = \dfrac{1}{1-\lambda}$ である（$\lambda \neq 1$ なので問題ない）。したがって

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1-\lambda}\,\mathbf{c}.$$

$\frac{1}{1-\lambda} > 1$ なので、D は確かに OC を C の先へ延長した部分にあり、そうなるべきとおりである。

G。OB 上の点は $t(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})$ である。EF 上の点は

$$(1-s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+s(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})=(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}s+\tfrac{1}{2}\lambda s)\mathbf{a}+s\mathbf{c}.$$

である。$\mathbf{c}$ の係数を比較すると $s=t$ となり、次に $\mathbf{a}$ の係数から

$$\lambda t=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}t+\tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\Big(\frac{3\lambda+2}{6}\Big)=\frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t=\frac{2}{3\lambda+2}.$$

を得る。よって

$$\mathbf{g}=\frac{2}{3\lambda+2}(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}).$$

H。直線 DG 上の点は

$$(1-k)\mathbf{d}+k\mathbf{g}=\frac{2k\lambda}{3\lambda+2}\mathbf{a}+\Big(\frac{1-k}{1-\lambda}+\frac{2k}{3\lambda+2}\Big)\mathbf{c}.$$

である。

考えてみよう この直線上の点のうち、OA 上にある点はどのようにして選び出せばよいか。

直線 OA 上の点は $\mathbf{a}$ だけの倍数なので、$\mathbf{c}$ の係数が 0 になればよい。$(1-\lambda)(3\lambda+2)$ を掛けると

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda)&=0\\(3\lambda+2)-k(3\lambda+2-2+2\lambda)&=0\\k&=\frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

このとき $\mathbf{a}$ の係数は

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda}=\frac{2}{5},\qquad\text{よって}\qquad\mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

となる。答えをまとめると

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{c}}{1-\lambda},\quad\mathbf{e}=\tfrac{1}{3}\mathbf{a},\quad\mathbf{f}=\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad\mathbf{g}=\frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2},\quad\mathbf{h}=\tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

$OH=\frac{2}{5}OA$ かつ $HA=\frac{3}{5}OA$ なので、台形の形によらず

$$OH:HA=2:3,$$

である。

検算

- $\mathbf{a} = (6,0)$, $\mathbf{c} = (1,2.5)$, $\lambda = \frac{1}{2}$ とする（図の場合）。公式から $D = (2,5)$, $G \approx (2.286, 1.429)$, $H = (2.4,0)$ が得られる。D から G への傾きは $-3.571/0.286 = -12.5$ であり、D から H への傾き $-5/0.4$ も同じ値である。よって D, G, H は確かに同一直線上にある。
- H の答えは λ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ によらない。コンピュータで 2000 個のランダムな台形について作図全体を厳密な有理数演算で繰り返したところ、毎回 $OH : HA = 2 : 3$ となった。
- $\lambda \to 1$ のとき辺 OC と AB は平行になり、$\mathbf{d} = \mathbf{c}/(1-\lambda)$ は無限遠へ飛んでいく。これはそうなるべきとおりである。

よくある間違い

- 異なる 2 直線に同じパラメータ（parameter）の文字を使ってしまう。等しいとおく前に、各直線にそれぞれ別のパラメータが必要である。
- なぜ許されるのかを述べずに係数を比較してしまう。係数比較がうまくいくのは、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ が平行でないからである。
- $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$ と書いてしまう。$\mathbf{a}$ に平行なのは $\overrightarrow{AB}$ ではなく $\overrightarrow{CB}$ である。

STEP のその先へ

答え $2 : 3$ が台形の形によらないのは、各段階で用いているのが直線、交点、直線上の比だけであり、アフィン写像（affine map、線形写像（linear map）に平行移動（translation）を続けたもの）はこれらをすべて保つからである。したがって、台形を都合のよい台形、たとえば $OABC$ で C が O の真上にあるようなものに写し、そこで計算してもよい。これが**アフィン幾何学**（affine geometry）の考え方である。また、係数の形 $(1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ は重心座標（barycentric coordinates）の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は線形写像と座標を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* にはこのような形式のベクトル幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。