解答例

STEP II 2006、第 7 問

純粋数学 ・ 楕円の接線

STEP II 2006、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q7

鍵となる考え方

接線（tangent）は、「x^2 を xx_0 に、y^2 を yy_0 に置き換える」という形から求めるのが最も速く、陰関数微分（implicit differentiation）を用いても同じ結果が得られる。作図の部分では、Q の座標と直線 PQ の方程式を計算し、それを一般の点における接線と比較すればよい。問題文の $\tan(\alpha/2) = k$ という言葉は強いヒントである。これは、$\cot\alpha$ と $\operatorname{cosec}\alpha$ を $t = \tan(\alpha/2)$ を用いて表せ、ということを示している。

解答

接線

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x について陰関数微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

点 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ において、$\sin\alpha \neq 0$ のとき（そうでなければ接線は鉛直となり、与えられた方程式は意味をなさない）、傾き（gradient）は

$$-\frac{b^2 a\cos\alpha}{a^2 b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

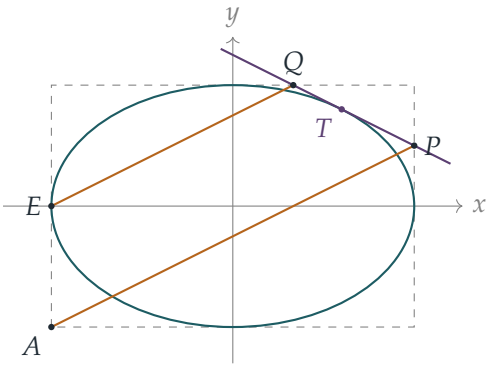
したがって接線は

$$\begin{aligned} y - b\sin\alpha &= -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha) \\ \implies \quad y &= -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

すなわち $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}\,x + b\operatorname{cosec}\alpha$ となり、示すべき式が得られた。

作図

$a = 3$、$b = 2$、$k = \frac{1}{2}$ の場合の図を示す。楕円（ellipse）は、頂点が $(\pm a, \pm b)$ である長方形の内側にある。A は左下の頂点、E は左辺の中点であり、P は右辺上、Q は上辺上にある。



直線 AP は $(-a, -b)$ と (a, kb) を結ぶので、その傾きは

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)} = \frac{(1+k)b}{2a}.$$

$E(-a, 0)$ を通りこれに平行な直線は $y = \dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$ である。$y = b$ とおくと $x + a = \dfrac{2a}{1+k}$ となるので

$$Q = \left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

次に、PQ の傾きは

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k} - a} = \frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}} = -\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

であり、$k \neq 0$ であるからこの計算は問題ない。点 $P(a, kb)$ を用いると、直線 PQ は

$$y = kb - \frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a) = -\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x + \frac{2k^2b + b(1-k^2)}{2k},$$

となるので

$$PQ: \qquad y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x + b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

考えてみよう これが楕円上のある点における接線であることは、どうすればわかるだろうか？

上で求めた $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ における接線と比較する。$\cot\alpha = \dfrac{1-k^2}{2k}$ かつ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1+k^2}{2k}$ となる α が必要である。これはまさに t 公式（t-formulae）である。$t = \tan(\alpha/2)$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{よって} \qquad \cot\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+t^2}{2t}.$$

$0 < k < 1$ であるから、$\alpha = 2\arctan k$ と選ぶことができる。これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので、$\sin\alpha \neq 0$ かつ $\tan(\alpha/2) = k$ である。$t = k$ とすると、二つの式は PQ の傾きと切片（intercept）の両方に一致する。よって PQ は直線 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$ であり、これは $\tan(\alpha/2) = k$ を満たす点 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ における楕円の接線である。これが示すべきことであった。

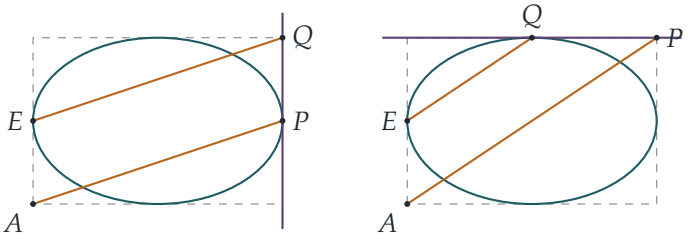
座標で表すと、接点（point of contact）は $T = \left(\dfrac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \dfrac{2kb}{1+k^2}\right)$ である。

$k = 0$ と $k = 1$ の場合

上の計算では k で割っており、また接線の公式には $\sin\alpha \neq 0$ が必要であるので、作図を直接やり直す。

$k = 0$. このとき $P = (a, 0)$ であり、AP の傾きは $\frac{b}{2a}$ である。E を通りこれに平行な直線は $y = \frac{b}{2a}(x + a)$ であり、$y = b$ と $x = a$ で交わるので $Q = (a, b)$ となる。すると PQ は鉛直な直線 $x = a$ である。これは $\alpha = 0$ に対応する点 $(a, 0)$ における楕円の接線であり、$\tan(0/2) = 0 = k$ である。したがって、接線を $y = mx + c$ の形に書けないにもかかわらず、結果は**依然として**成り立つ。

$k = 1$. このとき $P = (a, b)$ であり、AP は長方形の対角線で、傾きは $\frac{b}{a}$ である。E を通りこれに平行な直線は $y = \frac{b}{a}(x + a)$ であり、$y = b$ と $x = 0$ で交わるので $Q = (0, b)$ となる。すると PQ は水平な直線 $y = b$ であり、楕円の最上点 $(0, b)$ における接線である。これは $\alpha = \frac{\pi}{2}$ に対応する点であり、$\tan(\pi/4) = 1 = k$ である。よってこの場合も結果は成り立つ（しかも公式もそのまま使える。$\cot\frac{\pi}{2} = 0$、$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ から $y = b$ が得られる）。



検算

- $a = 3$、$b = 2$、$k = \frac{1}{2}$ とする。このとき $Q = (1,2)$ であり、PQ は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ である。また $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ であるから $\cos\alpha = \frac{3}{5}$、$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ となり、$T = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ である。この点は PQ 上にあり（$-\frac{9}{10} + \frac{5}{2} = \frac{8}{5}$）、そこでの傾きは $-\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{4\cdot 9/5}{9\cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$ である。
- PQ を楕円の方程式に代入すると、重解（repeated root）をもつ二次方程式が得られるはずである。このことと、Q および PQ の式を、ランダムに選んだ a、b、k の千通りの組について数値的に確かめた。
- $k \to 0^+$ のとき $T \to (a,0)$ であり、$k \to 1^-$ のとき $T \to (0,b)$ である。これは二つの端の場合と一致する。

よくある間違い

- PQ の傾きの符号を間違える。分母 $\frac{a(1-k)}{1+k} - a$ は負である。
- $\operatorname{cosec} 0$ が定義されないことを理由に、$k = 0$ では結果が成り立たないと述べてしまう。破綻するのは**公式**であって、幾何的な事実ではない。PQ は依然として $\alpha = 0$ における接線である。

STEP のその先へ

置換 $t = \tan(\alpha/2)$ は、楕円の有理パラメータ表示（rational parametrisation）$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$ を与える。これは、三角関数の積分を有理関数の積分に変換したり、すべてのピタゴラス数（Pythagorean triples）を求めたりするのと同じ考え方である。すべての二次曲線（conic）はこのように有理的にパラメータ表示でき、ここで扱ったような、平行線と交点だけから組み立てられる作図は、射影幾何学（projective geometry）の主題である。これが整数論（number theory）とどう結びつくかを初めて知るには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。