解答例

STEP II 2006、第 5 問

純粋数学 ・ 床関数と面積

STEP II 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q5

鍵となる考え方

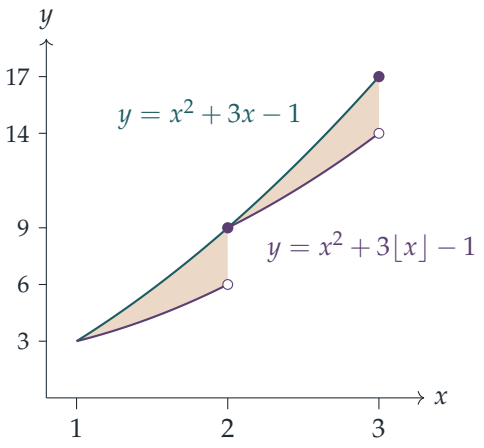
連続する 2 つの整数の間 $k \le x < k+1$ では、床関数（floor function）は一定で、その値は k である。したがって、このような長さ 1 の各区間上では、ぎざぎざの曲線もふつうの滑らかな曲線であり、面積は長さ 1 の区間ごとの帯の和に分けられる。$[k, k+1]$ 上の帯の面積を k の関数として求め、それを $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について足し合わせればよい。

解答

以下では一貫して $f(x) = x^2 + 3x - 1$ と書く。$1 \le x \le 3$ において、この関数は $f(1) = 3$ から $f(2) = 9$ を経て $f(3) = 17$ まで増加する。また $x \ge 1$ では $f'(x) = 2x + 3 > 0$ であるから、すべての $x \ge 1$ で増加関数である。

小問 (i)

2 つ目の曲線は $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$ である。$[1, 2)$ 上では $\lfloor x \rfloor = 1$ であるから、これは $y = x^2 + 2$ であり、3 から 6 に向かって増加する。$[2, 3)$ 上では $\lfloor x \rfloor = 2$ であるから、これは $y = x^2 + 5$ であり、9 から 14 に向かって増加する。そして $x = 3$ では値は 17 である。各部分は放物線（parabola）$y = f(x)$ を下に平行移動したものであり、2 つの曲線はすべての整数で交わる。



2 つの曲線の縦方向の差は

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3(x - \lfloor x \rfloor) \geq 0,$$

であるから、1 つ目の曲線が 2 つ目の曲線より下にくることはない。k を整数とすると、区間 $[k, k+1]$ 上でこの差は、ただ 1 点 $x = k+1$ を除いて $3(x-k)$ であり、その 1 点は積分に影響しない。よって $[k, k+1]$ 上の帯の面積は

$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\right]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

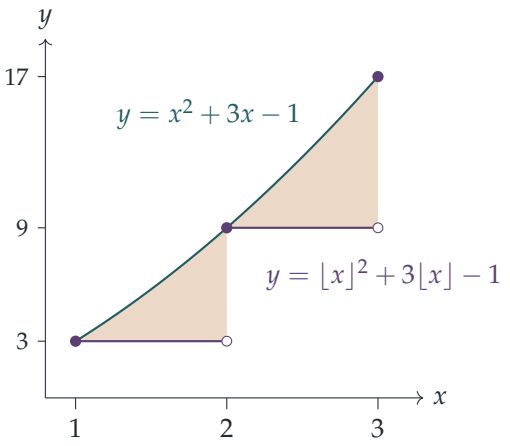
であり、どの k についても同じである。区間 $1 \leq x \leq n$ は長さ 1 の $n-1$ 個の区間 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$ からなるので、2 つの曲線の間の面積は

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

である。

小問 (ii)

今度は 2 つ目の曲線は $y = f(\lfloor x \rfloor)$ であり、これは階段関数（step function）である。すなわち $[1,2)$ 上で $y = f(1) = 3$、$[2,3)$ 上で $y = f(2) = 9$、そして $x = 3$ で $y = f(3) = 17$ となる。各段は整数のところで放物線上から始まり、右へ水平にのびている。



考えてみよう どちらの曲線が上にあり、それはずっと上にあり続けるだろうか？

f は $x \geq 1$ で増加し、かつ $\lfloor x \rfloor \leq x$ であるから、$1 \leq x \leq n$ 全体で $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$ が成り立つ。したがって放物線が常に上にあり、面積は単に $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$ の積分であって、符号の変化を気にする必要はない。

$k \geq 1$ を整数とすると、$[k, k+1]$ 上で段の高さは $f(k)$ である（ここでもただ 1 点 $x = k+1$ は無視する）。$0 \leq t \leq 1$ として $x = k + t$ と置換すると、

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

となるので、$[k, k+1]$ 上の帯の面積は

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

である。小問 (i) と異なり、今度は放物線の傾きが急になっていくため、帯は k とともに大きくなる。帯を $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について足し合わせ、$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

▶ $n = 1$ のときは領域がまったく存在せず、どちらの答えも 0 を与える。

- $n = 2$ のとき、小問 (ii) の答えは $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$ である。直接計算すると $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$ となる。
- $n = 2, \ldots, 7$ について差を中点則（midpoint rule）で数値積分すると、$\frac{3}{2}(n-1)$ および $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$ と小数第 4 位まで一致した。たとえば小問 (ii) で $n = 4$ とすると 11.5 となる。

よくある間違い

- 帯を $n-1$ 個ではなく n 個と数えてしまう。区間 $[1, n]$ には長さ 1 の区間は $n-1$ 個しか含まれない。
- 小問 (ii) で、k とすべきところを $\int_0^1 2kt\,\mathrm{d}t = 2k$ としてしまう。
- 先に整数のところで区間を分けずに、区間全体にわたって $\lfloor x \rfloor$ を x であるかのように積分してしまう（あるいは無視してしまう）。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、曲線の下の面積と、その下に収まる長方形の「階段」の面積とを比べている。これはまさに、刻み幅 1 の下リーマン和（lower Riemann sum）である。大学最初の解析学（analysis）の講義では、刻みを細かくしていくときにこのような下和と上和を挟み込むことで積分を**定義**する。$\lfloor x \rfloor$ のように跳びのある関数も、その跳びが孤立した点であるため、やはり積分可能（integrable）である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、リーマン（Riemann）積分について非常に読みやすい解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。