解答例

STEP II 2006、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

STEP II 2006、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$x = \pi - t$ を行うと、$\sin x$ は変わらないが、因子 x は $\pi - t$ に変わる。そのため、もとの積分が右辺に再び現れ、方程式のようにそれについて解くことができる。これにより、扱いにくい因子 x が完全に消える。その後は、問題中のどの積分も $\sin x$ の関数に $\sin x$（または $\cos x$）を掛けたものとなり、置換 $u = \cos x$ または $u = \sin x$ によって計算が完了する。本当に頭を使うのは、小問 (ii) と (iii) を、恒等式（identity）が適用できる形にどう持ち込むかに気づく部分である。

解答

恒等式

$I = \int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。$x = \pi - t$ とおくと $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ であり、$x = 0$ のとき $t = \pi$、$x = \pi$ のとき $t = 0$ である。$\sin(\pi - t) = \sin t$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

となる。積分変数の名前は何でもよいからである。したがって $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ であり、これが示すべき結果である：

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

小問 (i)

ここでは $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$ であるから、恒等式より

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

$3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$ と書き、$u = \cos x$、$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$ と置換する。u は 1 から -1 まで動く：

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

部分分数分解（partial fractions）により $\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u} + \dfrac{1}{2+u}\right)$ であるから、

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

（$[-1,1]$ 上で $2\pm u$ はともに正なので、絶対値（modulus）の記号は不要である。）したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

小問 (ii)

考えてみよう 恒等式が使えるのは $[0,\pi]$ だけである。$[\pi,2\pi]$ はどう扱えばよいか。

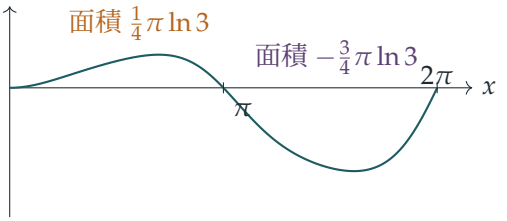
積分区間を π で分け、後半部分を $x = \pi + t$ によって $[0,\pi]$ に戻す。すると $\sin x = -\sin t$、$\sin^2 x = \sin^2 t$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

となる。ここで $J = \frac{1}{2}\ln 3$ と小問 (i) の結果を用いた。小問 (i) の $[0,\pi]$ 上の積分を加えると、

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

答えが負になる理由は図を見るとわかる。被積分関数（integrand）は前半と後半で同じ形をしているが、$[\pi,2\pi]$ ではより大きな x の値で重み付けされている。



小問 (iii)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であり、$[0,\pi]$ 上で $\sin x \geq 0$ であるから、

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

となり、これは $\sin x$ だけの関数である。

> **考えてみよう** ここに現れるのが $\cos x$ ではなく $|\cos x|$ であることが、なぜ重要なのか。

$[0,\pi]$ 上では、$\cos x$ は $\sin x$ の関数ではない。実際、$\sin(\pi - x) = \sin x$ である一方で $\cos(\pi - x) = -\cos x$ となる。しかし $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$ は $\sin x$ の関数である。したがって、絶対値こそが恒等式の適用を可能にしているのである：

$$\int_0^{\pi} \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^{\pi} \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

新しい被積分関数は $x \mapsto \pi - x$ で不変なので、$[0,\pi]$ 上の積分は $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 2 倍である。この区間では $\cos x \geq 0$ であり、絶対値を外すことができる：

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

分子が分母の導関数になっているからである。したがって

$$\int_0^{\pi} \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）による数値計算では、(i) が 0.86285、(ii) が -1.72570、(iii) が 0.90378 となり、それぞれ $\frac{1}{4}\pi\ln 3$、$-\frac{1}{2}\pi\ln 3$、$\pi\ln\frac{4}{3}$ と一致する。
- (ii) の答えは (i) の答えのちょうど -2 倍である。これは π で分けて考えると説明がつく。前半と後半はそれぞれ $\frac{1}{4}\pi\ln 3$ と $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$ である。
- 恒等式の簡単な確認：$f \equiv 1$ とすると、両辺はともに $\frac{1}{2}\pi^2$ に等しい。

よくある間違い

- $[0,2\pi]$ 上で類似の「恒等式」を使ってしまうこと。そうすると $\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$ が得られてしまう。この証明には $\sin(2\pi - t) = \sin t$ が必要だが、これは誤りである。
- (iii) で、$[0,\pi]$ 全体にわたって $|\sin 2x| = 2\sin x\cos x$ と書いてしまうこと。そうすると内側の積分が 0 になってしまう。

STEP のその先へ

積分を再び現れさせてそれについて解く手法や、$x \mapsto \pi - x$ のような対称性の利用は、解析学（analysis）において、また初等的な原始関数（antiderivative）をもたない定積分（definite integral）の計算において、標準的な道具である。これらはフーリエ級数（Fourier series）へとつながる。フーリエ級数では、x と三角関数の積を 1 周期にわたって積分したものが基本的な対象となる。この種の議論についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）を、積分の厳密な理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学を理解する）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。