解答例

STEP II 2006、第 3 問

純粋数学 • 無理数と近似

> **STEP II 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

鍵となる考え方

数 $5+\sqrt{24}$ には「共役」(conjugate) な数 $5-\sqrt{24}$ があり、両者の積は 1 である。ある数とその共役の同じ累乗を足し合わせると、根号を含む項 (surds) がすべて打ち消し合うので、その和は整数になる。共役な数は小さいので、その累乗はごく小さく、したがって大きいほうの累乗は整数のわずかに下に位置するはずである。小問 (ii) は、5 を N に置き換えた同じ議論である。

解答

小問 (i)

$a=5+\sqrt{24}$、$b=5-\sqrt{24}$ とおく。すると

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

であるから $b=1/a$ である。したがって求める式は a^4+b^4 である。$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ を 2 回用いると

$$a^2+b^2=10^2-2=98,$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602.$$

よって $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$ であり、これは整数である。

不等式 (inequalities) については、$\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$ であったことを思い出そう。

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$ であり、これは正しい。(両辺が正なので、ここで 2 乗する操作は可逆である。)

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$ であり、これは正しい。
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$ であり、これは正しい。

よって $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$ である。

考えてみよう これらの評価から、a^4 を小数第4位までどのように確定できるだろうか。

最初の結果から $a^4 = 9602 - b^4$ である。正の数についての不等式 $0.1 < b < 0.11$ の各辺を4乗すると

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

となり、したがって

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

この区間内のすべての数は 9601.99985 と 9601.9999 の間にあるので、四捨五入すると

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \quad \text{（小数第4位まで）。}$$

となる。（より鋭い評価 $b < \frac{2}{19}$ からは $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$ が得られる。これはここでは必要ないが、$\frac{2}{19}$ がどこから来たのかを示している。検算を参照のこと。）

小問 (ii)

$A = N + \sqrt{N^2-1}$、$B = N - \sqrt{N^2-1}$ とおく。$N \geq 2$ なので、どちらも実数である。先ほどと同様に

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

ステップ1：$A^k + B^k$ は整数である。 両方の累乗を二項定理（binomial theorem）で展開する。$\sqrt{N^2-1}$ の偶数乗を含む項は整数であり、両方の展開に同じ形で現れる。奇数乗を含む項は符号が逆になって現れ、打ち消し合う。よって、すべての正の整数 k に対して $S_k = A^k + B^k$ は整数である。（別解として、A と B は $x^2 - 2Nx + 1 = 0$ の解であるから、$S_0 = 2$、$S_1 = 2N$ のもとで $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$ が成り立ち、帰納法（induction）によって整数であることがわかる。）

ステップ2：B は小さい。 $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$ であることを示す。$B = 1/A$ かつ $A > 0$ であるから、これは

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

と同値である。（$N \geq 2$ なので）両辺は正であるから、2乗してよい：

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

これは $N \geq 2$ なので成り立つ。よって $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ であり、（すべて正なので）各辺を k 乗すると

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

ステップ 3：結論。 $A^k = S_k - B^k$ であるから、A^k は整数 S_k からちょうど B^k だけ離れたところにある。A^k に最も近い整数は、少なくとも S_k と同じくらい A^k に近い（実際には、$B^k < \frac{1}{2}$ なのでそれは S_k そのものである）。したがって

$$\left|A^k - (\text{最も近い整数})\right| \leq B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 数値的には $(5+\sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$ であり、これは求めた区間内にあって、四捨五入すると 9601.9999 になる。
- $N = 5$ のとき、小問 (ii) から $(2N - \frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$ が得られる。これは小問 (i) の評価とちょうど一致する。つまり小問 (i) は、$N = 5$、$k = 4$ の場合が姿を変えて現れたものである。
- $N = 2$、$k = 1$ のとき：$2 + \sqrt{3} \approx 3.732$ は 4 から約 0.268 離れており、$(3.5)^{-1} \approx 0.286$ なので、評価は成り立つ。コンピュータで N は 1000 まで、k は 24 まで確認した。

よくある間違い

- 両辺が正であることに触れずに $\sqrt{N^2-1} > N - \frac{1}{2}$ を 2 乗してしまう。
- $a^4 \approx 9602.0000$ と書いてしまう。この値は 9602 より 0.0001 から 0.00015 の間だけ小さく、それだけで小数第 4 位が変わってしまう。
- $N = 1$ の場合が除外されているのには理由があることを忘れる。このときは $B = 1$ となり、議論が成り立たなくなる。

STEP のその先へ

$5 + \sqrt{24}$ のような数は、環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ の単数（units）である。すなわち、同じ形の逆元 $5 - \sqrt{24}$ をもち、その累乗によってペル方程式（Pell equation）$x^2 - 24y^2 = 1$ のすべての解が得られる。このような単数の累乗はどんどん整数に近づいていく。これはピゾ数（Pisot numbers）の理論への一つの入り口であり、ピゾ数の累乗も同じよう

に整数に近い振る舞いをする。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は、ペル方程式と連分数（continued fractions）を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。