解答例

STEP II 2006、第 14 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

STEP II 2006、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s2-q14

鍵となる考え方

この問題全体は、ただ一つの原始関数（antiderivative）にかかっている。分母 $x\ln x$ は $\ln x$ に x を掛けたものであり、$1/x$ は $\ln x$ の導関数であるから、被積分関数（integrand）は $g(x)=\ln x$ として $g'(x)/g(x)$ の形をしている。したがって

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

あとは各小問で「確率の総和は 1」を用い、符号と、密度（density）が実際に 0 でない範囲に注意を払えばよい。

解答

グラフの概形

$x>0$、$x\neq 1$ に対して $y=\dfrac{1}{x\ln x}$ とおく。

符号。$x>0$ であるから、y の符号は $\ln x$ の符号と一致する。すなわち $0<x<1$ では $y<0$、$x>1$ では $y>0$ である。曲線は座標軸と交わらない。

端での振る舞い。

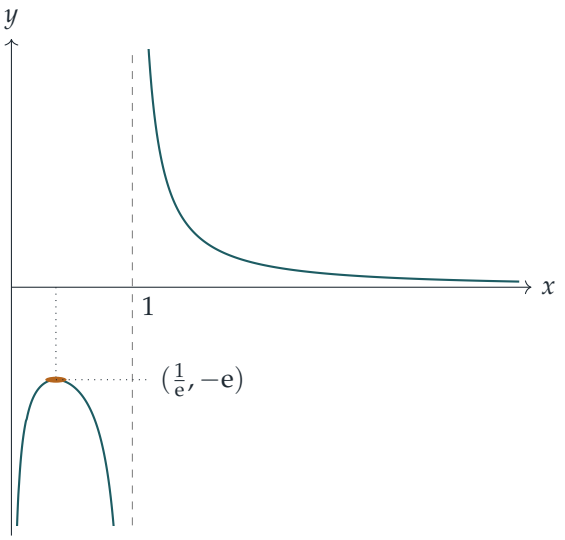
- $x\to 0^+$ のとき：問題文より $x\ln x\to 0$ であり、そこでは $x\ln x<0$ であるから、$y\to-\infty$ となる。
- $x\to 1$ のとき：$x\ln x\to 0$ であり、左側からは負、右側からは正であるから、$x\to 1^-$ のとき $y\to-\infty$、$x\to 1^+$ のとき $y\to+\infty$ となる。直線 $x=1$ は垂直な漸近線（asymptote）である。

► $x \to \infty$ のとき：$x\ln x \to \infty$ であるから $y \to 0^+$ となり、x 軸が漸近線である。

極値。商の微分法（quotient rule）（あるいは合成関数の微分法（chain rule））により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

であり、これが 0 になるのは $\ln x = -1$、すなわち $x = 1/\mathrm{e}$ のときに限る。このとき $y = \dfrac{1}{(1/\mathrm{e})(-1)} = -\mathrm{e}$ である。$0 < x < 1/\mathrm{e}$ では $\ln x + 1 < 0$ であるから y は増加し、$x > 1/\mathrm{e}$（ただし $x \neq 1$）では減少する。よって $(1/\mathrm{e}, -\mathrm{e})$ は左側の枝の極大点（local maximum）であり、右側の枝は $+\infty$ から 0 まで単調に減少する。



小問 (i)

ここでは $a = \frac{1}{4}$、$b = \frac{1}{2}$ であり、どちらも $x\ln x < 0$ となる区間 $(0,1)$ に属する。上の原始関数を用いると

$$\begin{aligned}\int_{1/4}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} &= \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1/4}^{1/2} = \ln|\ln\tfrac{1}{2}| - \ln|\ln\tfrac{1}{4}| \\ &= \ln(\ln 2) - \ln(2\ln 2) = -\ln 2.\end{aligned}$$

確率の総和は 1 でなければならないから、$\lambda\cdot(-\ln 2) = 1$ であり、

$$\lambda = -\frac{1}{\ln 2}$$

を得る。負の符号はまさに必要なものである。$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上では $x\ln x < 0$ であるから、そこで f が非負になるためには λ は負でなければならない。

小問 (ii)

$\lambda = 1$ のとき密度は非負でなければならないから、区間 $[a, b]$ は $x \ln x > 0$ となる範囲になければならない。$b > a > 1$ であるから実際そうなっている。このとき $\ln a, \ln b > 0$ であり、

$$1 = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln b) - \ln(\ln a) = \ln \frac{\ln b}{\ln a}.$$

よって $\dfrac{\ln b}{\ln a} = \mathrm{e}$、すなわち $\ln b = \mathrm{e} \ln a = \ln\left(a^{\mathrm{e}}\right)$ であり、ln は単射（one-to-one）であるから $b = a^{\mathrm{e}}$ となり、示すべきことが示された。

小問 (iii)

$a = \mathrm{e}$ のとき、小問 (ii) より $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ である。$1 < \frac{3}{2} < 2 < \mathrm{e}$ であるから、区間 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ 全体が $[a, b] = [\mathrm{e}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$ に含まれる。したがって

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \leq X \leq \mathrm{e}^2) = \Big[\ln(\ln x)\Big]_{\mathrm{e}^{3/2}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln \tfrac{3}{2} = \ln \tfrac{4}{3}.$$

これを分数で表すために、マクローリン級数（Maclaurin series）$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$ に $t = \frac{1}{3}$ を代入し、4 項までとる：

$$\ln \tfrac{4}{3} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} = \frac{108 - 18 + 4 - 1}{324} = \frac{93}{324} = \frac{31}{108}.$$

考えてみよう 4 項で打ち切るのが妥当だと、どうしてわかるのだろうか？

この級数は符号が交互に変わり、項の絶対値は減少していくので、4 項で打ち切ったときの誤差は第 5 項 $\frac{1}{5 \cdot 3^5} = \frac{1}{1215} < 0.001$ より小さい。よって $\mathrm{P} = \ln \frac{4}{3} \approx \frac{31}{108}$ となり、示すべきことが示された。

小問 (iv)

今度は $a = \mathrm{e}^{1/2}$ であるから、小問 (ii) より

$$b = a^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}.$$

考えてみよう 積分する前に、密度が実際に 0 でないのはどこだろうか？

$\mathrm{e} < 3$ であるから $\mathrm{e}/2 < \frac{3}{2}$ であり、$b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2} < \mathrm{e}^{3/2}$ となる。区間 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ は完全に b より右側にあり、そこでは $\mathrm{f}(x) = 0$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \leq X \leq \mathrm{e}^2) = 0.$$

（何も考えずに $1/(x \ln x)$ を $\mathrm{e}^{3/2}$ から e^2 まで積分すると再び $\ln \frac{4}{3}$ が得られるが、これは誤りである。）

検算

- 数値的には $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$ であり、$(0,1)$ 上で y を調べると、そこで最大値 $\approx -2.718 = -\mathrm{e}$ をとる。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \approx -0.6931 = -\ln 2$ が得られるので、$\lambda \approx -1.4427$ である。
- $a > 1$ のいくつかの値（たとえば $a = 2$、$a = 7.3$）に対して、$\int_a^{a^{\mathrm{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$ は 1.0000 となる。
- $\ln \frac{4}{3} \approx 0.28768$、$\frac{31}{108} \approx 0.28704$ であり、両者の差は 0.0007 以内である。
- (iv) では $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2} \approx 3.89$ であるのに対し、$\mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ である。

よくある間違い

- $\ln x < 0$ である小問 (i) で $\ln(\ln x)$ と書いてしまう。原始関数には絶対値が必要であり、$\ln|\ln x|$ とすべきである。
- $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$ と答えてしまう。λ が正だと「密度」が負になってしまう。
- 小問 (iv) で、$[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ が台（support）$[a,b]$ に含まれるかを確かめずに積分してしまう。

STEP のその先へ

置換（substitution）$u = \ln x$ により、この密度は $[\ln a, \ln b]$ 上の $1/u$ に変わり、条件 $b = a^{\mathrm{e}}$ は $\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = 1$ にほかならない。このような確率変数（random variable）の変換（ここでは $U = \ln X$）は大学 1 年の確率論の中心的な道具であり、確率変数の関数の密度は合成関数の微分法から求められる。同じ関数 $1/(x \ln x)$ は解析学でもよく知られている。$\sum 1/(n \ln n)$ は、項が 0 に収束するにもかかわらず、この積分との比較によって発散（diverges）するのである。確率変数の変換については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。