解答例

STEP II 2006、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP II 2006、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q10

鍵となる考え方

各衝突は 2 本の方程式で解ける問題である。直線方向の運動量保存（conservation of momentum）と、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）、すなわち「遠ざかる速さは近づく速さの e 倍に等しい」という法則である。まず A–B の衝突を解き、次に B の新しい速度を B–C の衝突に代入する。A と B の 2 回目の衝突が起こるのは、B の後ろにいる A が、B が C に衝突した後の B よりも前向きに速く動いているとき、まさにそのときである。そうすると小問 (ii) は、一定の速度で動く物体どうしの追いかけ問題になる。

解答

A、B、C を、滑らかな（smooth）面上の一直線上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって衝突の間を除けば水平方向の力ははたらかない。A が打ち出される向きを正の向きとする。以下の速度はすべて符号付きである。

小問 (i)

A と B の衝突。衝突直後の A と B の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量保存と反発の法則（$e = \frac{1}{2}$）から

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

$v_A = v_B - \frac{1}{2}u$ を第 1 式に代入すると $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$ となるので、

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

$v_B > 0$ であるから、B は確かに C に向かって進む。また $v_A < v_B$ であるから、B が C に達する前に A が B に追いつくことはない。

B と C の衝突。衝突直後の B と C の速度をそれぞれ w_B、w_C とする。$e = \frac{1}{4}$ であるから

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

$w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$ を代入すると $(k+3)w_B = (k - \frac{3}{4})v_B$ となるので、

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

また $w_C > w_B$ であるから、B と C は離れていき、二度と出会わない。この衝突の後は、A と B が出会うまで（出会うとすれば）、A にも B にも何もはたらかない。

考えてみよう A と B が再び衝突するための条件は、正確には何か？

B が C に衝突した後は、A も B も一定の速度で動き、A は B の後ろ（B より負の側）にいる。両者の間隔が縮まるのは $v_A > w_B$ のときであり、かつそのときに限る。そしてその場合、間隔は有限時間で 0 になる。$v_A \le w_B$ ならば間隔は決して減少しない。この 1 つの不等式で、符号のあらゆる場合が尽くされる。たとえば A が後ろ向きに動いていても、B がそれよりさらに速く後ろ向きに動いていれば、やはり B が A に追いつく。これも $v_A > w_B$ である。

したがって、必要な条件は

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

$k > 0$ より正である $8(1+k)(k+3)/u$ を両辺に掛けると、同値な不等式

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

を得る。$2k + 11 > 0$ であるから、これは $2k - 3 < 0$ と同値である。k は質量比なので $k > 0$ である。よって、A と B が 2 回目に衝突するのは、ちょうど

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

のときである。$k = \frac{3}{2}$ のときは $v_A = w_B = \frac{u}{10}$ となる。このとき両者は同じ速さで並んで進み、実際に再び出会うことはないので、端点は除かれる。

小問 (ii)

$k=1$ のとき、上の式から

$$v_A=\frac{u}{4},\qquad v_B=\frac{3u}{4},\qquad w_B=\frac{3u}{64},\qquad w_C=\frac{15u}{64}.$$

を得る。A と B が最初に衝突する位置（すなわち B の出発点）を原点とし、時刻 t をその衝突から測る。

B–C の衝突まで。 B は C までの距離 d を速さ $\frac{3}{4}u$ で進むので、かかる時間は

$$t_1=\frac{d}{3u/4}=\frac{4d}{3u}.$$

この間に A は $\frac{u}{4}\cdot\frac{4d}{3u}=\frac{d}{3}$ だけ進む。よって A は $\frac{d}{3}$、B は d の位置にあり、間隔は $\frac{2d}{3}$ である。

追いかけ。 今度は A が速さ $\frac{u}{4}=\frac{16u}{64}$、$B$ が速さ $\frac{3u}{64}$ で動くので、A は相対速度 $\frac{13u}{64}$ で間隔を詰める。かかる時間は

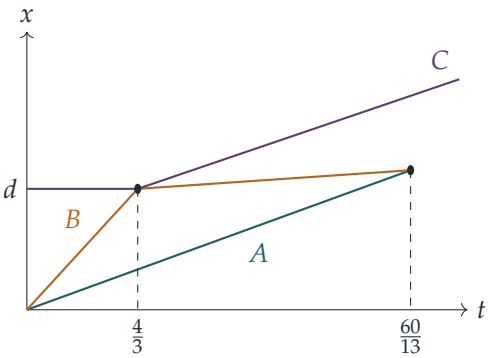
$$t_2=\frac{2d/3}{13u/64}=\frac{128d}{39u}.$$

合計。 A–B の 2 回の衝突の間の時間は

$$t_1+t_2=\frac{4d}{3u}+\frac{128d}{39u}=\frac{52d+128d}{39u}=\frac{180d}{39u}=\frac{60d}{13u},$$

となり、示すべき結果が得られた。

下の位置–時間グラフは、$u=d=1$ のときの運動を表している。A と B のグラフは $t=\frac{60}{13}$ で再び交わる。



検算

- 運動量：$k=1$ のとき、1 回目の衝突の後は $m\cdot\frac{u}{4}+m\cdot\frac{3u}{4}=mu$、2 回目の衝突の後は $m\cdot\frac{3u}{64}+3m\cdot\frac{15u}{64}=\frac{48}{64}mu=m\cdot\frac{3u}{4}$ である。どちらも釣り合っている。

- 境界 $k = \frac{3}{2}$：v_A と w_B はどちらも $\frac{u}{10}$ となり、これが臨界値であることが確かめられる。
- 妥当性の確認：k が大きいとき、A は後ろ向きに跳ね返り（$v_A < 0$）、B は前向きに進み続けるので、明らかに 2 回目の衝突はない。これは求めた範囲と一致する。
- 10^5 個のランダムな有理数 k について、$v_A > w_B$ となるのがちょうど $k < \frac{3}{2}$ のときであることを数値的に確かめた。また $u = d = 1$ として時間刻みのシミュレーションを行うと、2 回目の衝突は $t \approx 4.6154$ で起こり、$\frac{60}{13} \approx 4.6154$ と一致した。

よくある間違い

- 反発の法則で、符号付きの速度ではなく速さを使ってしまう。符号付きの速度を使えば、遠ざかる速さは「前の物体の速度から後ろの物体の速度を引いたもの」となり、v_A の符号は自動的に正しく扱われる。
- 条件の一部として $v_A > 0$ を要求してしまう。原理的には、A が後ろ向きに動いていても B に追いつかれることがありうる（$w_B < v_A$ の場合）。正しい条件は $v_A > w_B$ ただ 1 つである。
- (ii) で、追いかけの時間を B の速度が変わった瞬間からではなく 1 回目の衝突から測ってしまい、A がすでに進んでいる $\frac{d}{3}$ の先行分を見落とす。

STEP のその先へ

運動量保存と反発の法則を合わせると、どの衝突も、衝突前の速度から衝突後の速度への線形写像（linear map）になる。ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）や、2 つのブロックと壁の間の衝突回数を数える有名な問題のような衝突の連鎖は、これらの写像を合成することで調べられる。大学 1 年の力学では、これが重心系（centre-of-mass frame）へとつながる。重心系では反発の法則は相対速度の単純な定数倍となり、さらに 2 次元や 3 次元での衝突へと進んでいく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と重心系をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。